G. E. Hughes y M. J. Cresswell

Introducción a la lógica modal

ESTRUCTURA Y FUNCION

EDITORIAL TECNOS - MADRID

CASA DEL LIBRO
(Espasa Calpe, S. A.)
Avenida de José Antonio, 29
MADRID-13

ESTRUCTURA Y FUNCION

El porvenir actual de la Ciencia

Colección dirigida por ENRIQUE TIERNO GALVAN

1. QUENTIN GIBSON: *La lógica de la investigación social.*
2. M. F. ASHLEY MONTAGU: *La dirección del desarrollo humano* (2.ª ed.).
3. GUSTAV BERGMANN: *Filosofía de la ciencia* (reimpresión).
4. CHRISTIAN BAY: *La estructura de la libertad.*
5. ERNEST NAGEL: *La lógica sin metafísica.*
6. DAVID HILBERT y WILHELM ACKERMANN: *Elementos de lógica teórica* (2.ª ed.).
7. VERNON VAN DYKE: *Ciencia política: un análisis filosófico.*
8. KARL R. POPPER: *La lógica de la investigación científica* (2.ª edición).
9. R. M. MARTIN: *Verdad y denotación.*
10. ERNEST GELLNER: *Palabras y cosas.*
11. C. O. BROAD: *El pensamiento científico.*
12. JOHN HOSPERS: *La conducta humana.*
13. ARTHUR PAP: *Teoría analítica del conocimiento.*
14. T. C. SCHELLING: *La estrategia del conflicto.*
15. RICHARD B. BRAITHWAITE: *La explicación científica.*
16. MILIC CAPEK: *El impacto filosófico de la física contemporánea.*
17. ROS ASHBY: *Proyecto para un cerebro.*
18. HANS REICHENBACH: *Moderna filosofía de la ciencia.*
19. GEORGE POLYA: *Matemáticas y razonamiento plausible.*
20. GEORGE L. S. SHACKLE: *Decisión, orden y tiempo.*
21. D. M. ARMSTRONG: *La percepción y el mundo físico.*
22. ERNEST NAGEL: *Razón soberana.*
23. MAX BLACK: *Modelos y metáforas.*
24. HASKELL B. CURRY y ROBERT FEYS: *Lógica combinatoria.*
25. LUDWIG WITTGENSTEIN: *Los cuadernos azul y marrón.*
26. ABRAHAM EDEL: *El método en la teoría ética.*
27. ALFRED LANDÉ: *Nuevos fundamentos de la mecánica cuántica.*
28. JEAN LADRIÈRE: *Limitaciones internas de los formalismos.*
29. N. WIENER y J. P. SCHADÉ: *Sobre modelos de los nervios, el cerebro y la memoria.*
30. G. H. VON WRIGHT: *Norma y acción.* Una investigación lógica.
31. E. NAGEL y J. P. NEWMAN: *El teorema de Gödel.*
32. HENRY MARGENAU: *La naturaleza de la realidad física.* Una filosofía de la Física moderna.
33. V. C. CHAPPELL: *El lenguaje común.* Ensayos de filosofía analítica.
34. ALF ROSS: *Lógica de las normas.*
35. W. SELLARS: *Ciencia, percepción y realidad.*
36. CHRISTIAN THIEL: *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege.*
37. CLAUDE FLAMENT: *Teoría de grafos y estructuras de grupo.*
38. W. y M. KNEALE: *El desarrollo de la lógica.*

INTRODUCCION A LA LOGICA MODAL

ESTRUCTURA Y FUNCION
EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA

G. E. Hughes y M. J. Cresswell

INTRODUCCION
A LA
LOGICA MODAL

EDITORIAL TECNOS
MADRID

Los derechos para la versión castellana de la obra
An Introduction to Modal Logic
editada por Methuen and Co. Ltd., © 1968,
son propiedad de Editorial Tecnos, S. A.

Traducción por

ESPERANZA GUISAN SEIJAS

© EDITORIAL TECNOS, S. A., 1973
O'Donnell, 27. Madrid-9
ISBN. 84-309-0472-7
Depósito Legal: M. 33.887.—1973

Printed in Spain. Impreso en España por RAYCAR, S. A. IMPRESORES. Madrid

INDICE GENERAL

Prefacio ... ... *Pág.* 11
Tabla de equivalencias inglés–español 13

PARTE I

LOGICA PROPOSICIONAL MODAL

1. Cálculo Proposicional no modal 17

Símbolos primitivos y reglas de formación de CP (17) – Interpretación (18) – Nuevos operadores (20) – Interpretación de •, ⊃ y ≡(20) – Validez (22) – Prueba de la validez : (i) el método de la tabla de verdad (23) – Prueba de la validez: (ii) El método de la Reducción (24) – Sustitución de equivalentes (25) – Forma normal conjuntiva (26) – Axiomatización de CP (26) – El sistema PM (27) – Consistencia (28) – Completitud (29).

2. El Sistema T 31

Nociones modales básicas (31) – Sistemas de lógica modal (33) – El sistema T (36) – Método para establecer pruebas (38) – Pruebas de los teoremas (39) – Consistencia de T (45) – Ejercicios (46).

3. Los Sistemas S4 y S5 48

Introducción (48) – El sistema S4 (50) – Las Modalidades en S4 (51) – El sistema S5 (52) – Las Modalidades en S5 (53) – Funciones modales y grado modal (53) – Teorema de reducción de S5 (54) – Forma normal conjuntiva modal (57) – Teorema de la FNCM (57) – Las funciones modales en S4 (59) – El sistema Brouweriano (59) – Consistencia (60) – Degeneración en CP (60) – Ejercicios (61).

4. La validez en T, S4 y S5 62

El juego CP (62) – El juego T (63) – El juego S4 (65) – El juego S5 (66) – Algunas conclusiones (67) – Definiciones formales de la validez (69) – La interpretación intuitiva de los modelos y la validez (72) – Ejercicios (76).

5. T: Procedimiento de decisión y completitud 78

Prueba de la validez-T (78) – Diagramas semánticos como procedimiento de decisión para T (88) – La completitud de T (89) – Ejercicios (94).

6. S4 y S5: Procedimientos de Decisión y completitud 96

Diagramas-S4 (96) – La completitud de S4 (102) – Diagramas S5 (104) – Otro procedimiento de decisión para S5 (105) – La completitud de S5 (108) – Ejercicios (109).

7. Algunas bases permutables para T, S4 y S5 110

Bases permutables para T (110) – Bases permutables para S4 (112) – Bases permutables para S5 (113) – Ejercicios (115).

PARTE II

LOGICA DE PREDICADOS MODAL

8. Cálculo Elemental de Predicados 119

El cálculo elemental de predicados no modal (119) – Símbolos primitivos de CEP (119) – Reglas de formación (119) – Interpretación (120) – La validez en CEP (121) – Axiomatización (122) – Cálculos elementales de predicados modales (125) – La consistencia de CEP modal (128) – La validez en CEP modal (128) – El CEP modal monádico (130).

9. La completitud del CEP modal 131

La estructura general de una prueba Henkin (131) – Conjuntos máximamente consistentes (132) – Algunas propiedades de los conjuntos máximamente consistentes (133) – La completitud de PM (135) – La completitud de T, S4 y S5 (136) – La completitud del CEP (no modal) (138) – La completitud del CEP modal (142).

10. Modalidad y Existencia 147

La validez sin la fórmula Barcan (147) – Completitud sin la fórmula Barcan (150) – Interpretación de los modelos CEP modales (152) – La semántica de Kripke para CEP modal (153) – Modalidad *de dicto* y modalidad *de re* (156).

11. Identidad y descripción en CEP modal 161

CEP con identidad (161) – CEP modal con identidad (161) – La semántica del CEP modal con identidad (163) – Sistemas de identidad contingente (165) – Semántica para T + I y S4 + I (169) – Descripciones (170) – Introducción de descripciones mediante definición (173) – Conjuntos y atributos (175).

PARTE III

EXAMEN DE LA LOGICA MODAL

12. Los sistemas Lewis (I) 179

Preámbulo histórico (179) – Las "paradojas de la implicación" (180) – El sistema S1 (181) – S1 y T comparados (187) – "Principios-T" en S1 (191) – El sistema S2 (192) – El sistema S3 (195) – El sistema S4 (197) – El sistema S5 (198).

13. Los sistemas Lewis (II) 200

La diferenciación entre S1–S5 (200) – Otras bases para los sistemas Lewis (204) – Los sistemas Lewis y T (211).

14. Otros sistemas proposicionales modales 212

El sistema S0.5 (213) – Sistemas con el axioma Brouweriano (213) – Sistemas con axiomas S4 generalizados (215) – Sistemas entre S4 y S5 (216) – Sistemas entre S3 y S5 (219) – Extensiones de S4 no contenidas en S5 (219) – Sistemas no regulares (221) – Otros cálculos de predicados modales (225).

15. Procedimientos de validez y decisión para diversos sistemas 226

La validez en S2 y S3 (226) – Procedimientos de decisión para S2 y S3 (229) – La validez en S6–S8 (231) – Procedimientos de decisión para S6–S8 (232) – Los sistemas S3.5 y S9 (233) – El sistema S0.5 (235) – Sistemas que contienen a T (237) – El postulado de existencia (238).

16. Sistemas no habituales 240

Sistemas con operadores primitivos distintos a L o M (240) – El sistema E (244) – Sistemas sin el axioma de la necesidad (246) – Sistemas sin ninguna tesis de la forma $L\alpha$ (247) – Un sistema sin la interdefinibilidad de L y M (248) – Sistemas basados en cálculos proposicionales no clásicos (250) – El sistema modal Ł (266).

17. Algebra Booleana y Lógica Modal 255

Algebras Booleanas (255) – El Algebra Booleana y el CP (258) – Algebras Booleanas con adición de operadores (258) – Las Algebras Booleanas y el sistema T (259) – Las álgebras Booleanas y la validez T (266).

Apéndice 1. **Deducción natural y sistemas modales** 271

Apéndice 2. **Vinculación e Implicación estricta** 274

Apéndice 3. **Bases axiomáticas para sistemas modales proposicionales** 278

Apéndice 4. **Notación** 285

Apéndice 5. **Las estructuras modelo de Kripke y los conjuntos modelo de Hintikka** ... 288

Soluciones a los ejercicios 291

Bibliografía 293

Indice de Autores 305

Indice de Materias 307

Lista de símbolos y Reglas importantes 315

PREFACIO

La lógica modal se puede describir en pocas palabras como la lógica de la necesidad y de la posibilidad, del "debe ser" ('must be') y el "puede ser" ('may be').

Dos fueron los objetivos primordiales al escribir este libro. Uno fue el explicar con detalle lo que es la lógica modal y cómo construirla; el otro dar una visión de toda la materia en el presente estadio de su desarrollo. El primero de estos objetivos predomina en la I Parte y, en grado menor, en la II Parte; el segundo predomina en la III Parte. La I Parte podría usarse aisladamente como curso introductorio de instrucción sobre la teoría básica y las técnicas de la lógica modal.

Hemos intentado que el libro pueda ser comprendido sin necesidad de lecturas adicionales, incluyendo, al efecto, en los lugares apropiados, resúmenes de toda la lógica no modal que utilizamos en la exposición de los sistemas modales. Por esta razón podrá ser manejado por cualquiera que no haya estudiado lógica alguna anteriormente. Para lograr el máximo provecho, sin embargo, aconsejaríamos a un lector en tales circunstancias, que adquiriese, asimismo, algún otro libro sobre lógica y aprendiese algo más acerca del Cálculo Proposicional y el Cálculo Elemental de Predicados, de lo que hayamos podido indicarle en este libro.

Hemos prescindido en nuestro estudio de la lógica modal antigua y medieval y delimitado nuestra atención al moderno desarrollo de la materia, que tuvo su comienzo efectivo en la obra de C.I. Lewis, hace unos cincuenta años. Asimismo no ha sido nuestro intento ocuparnos de la lógica deóntica, epistemológica u otras lógicas estrechamente relacionadas con nuestra disciplina, que estarían comprendidas bajo el epígrafe de lógica modal, usado en un sentido más amplio que aquél en que nosotros lo utilizamos. Tampoco hemos estudiado lógicas polivalentes, aunque a veces se las haya agrupado entre las lógicas modales. Sin embargo, dentro de los límites indicados, hemos intentado abarcar todo lo posible en un trabajo de esta extensión y hemos proporcionado en todo momento referencias bibliográficas completas y detalladas.

Debe quedar claro, en todo caso, que éste es un libro de lógica formal. Es cierto que la lógica modal suscita un número considerable de problemas filosóficos y que al ocuparnos de la interpretación de los sistemas modales no hemos podido eludirlos enteramente. Sin embargo, hemos limitado las indicaciones filosóficas que hemos osado formular a aquellas que parecen ser necesarias para mostrar los objetivos de la propia disciplina formal. Algunos de los problemas que suscita la lógica modal figuran, en nuestra opinión, entre los más importantes y fundamentales de la filosofía, pero se precisaría un libro aparte, y muy distinto de éste nuestro, para tratarlos debidamente. En nuestra opinión existe además otro punto de contacto, de otra clase distinta, entre la Filosofía y la Lógica Formal, en el sentido de que la lógica puede utilizarse para aclarar parte de los propios problemas filosóficos y nos

gustaría pensar que lo que hemos escrito pueda animar a algunos filósofos a realizar un estudio serio de la lógica formal con este fin a la vista.

La notación que hemos utilizado es sólo una de las muchas usadas corrientemente. En este texto hemos traducido siempre las notaciones de otros escritores a las nuestras propias, pero en el Apéndice 4 hemos indicado en qué difieren de las nuestras, de tal suerte que el lector que consulte las notaciones originales no tendrá que esforzarse para comprender las fórmulas tal como allí se le presenten. Asimismo hemos adoptado la convención de que una fórmula o símbolo puede ser tratado como su propio nombre y, por tanto, cuando se hable acerca de él, no habrá necesidad de entrecomillarlo.

Deseamos agradecer al "Publications Committee" de la Universidad Victoria de Wellington la concesión de una beca para financiar la realización de este libro, así como expresar nuestra gratitud a Mrs. Helen Fleming, Mrs. Maureen Mowat y Mrs. Isbel Raudnic por su paciencia y cuidado al mecanografiar un manuscrito que era más difícil de descifrar todavía de lo que pueda parecer una vez impreso.

G. E. HUGHES
M. J. CRESSWELL

Wellington, Nueva Zelanda

NOTA SOBRE LAS REFERENCIAS

Todas las referencias bibliográficas se dan a pie de página y de forma abreviada, nombrando al autor y la fecha de publicación. Los detalles completos podrán verse en la Bibliografía del final de la obra, que está dispuesta por orden alfabético de autores y cronológicamente bajo el nombre de cada autor.

TABLA DE EQUIVALENCIAS INGLES–ESPAÑOL

EN EL TEXTO ORIGINAL	EN LA TRADUCCION
Alternative denial	Negación alternativa
BF (Barcan Formula)	FB (Fórmula Barcan)
BR (Becker's Rule)	RB (Regla de Becker)
CNF (conjunctive normal form)	FNC (forma normal conjuntiva)
Covering	Cobertura
CI (contingent identity)	IC (identidad contingente)
Completeness	Completitud
DR1, etc. (derived rules)	RD1, etc. (reglas derivadas)
Detachment	Separación
Discrete	Discontinuo-a
Entail	Vincular
Entailment	Vinculación
"iff" (if and only if)	SI (si y sólo si)
IC (intuitionist calculus)	CI (cálculo intuicionista)
LCP (lower predicate calculus)	CEP (cálculo elemental de predicados)
LMI (*L-M* interchange)	ILM (intercambio *L-M*)
MCNF (modal conjunctive normal form)	FNCM (forma normal conjuntiva modal)
Necessitation	Necesariedad
Occur	Aparecer
Occurrence	Aparición
PC (propositional calculus)	CP (cálculo proposicional)
Range	Alcance
Scope	Ambito
Seeing relation	Relación de visualidad
Sheffer stroke	Raya de Sheffer
Setting (in a game)	Jugada
TR1, etc. (transformation rules)	RT1, etc. (reglas de transformación)
UG (universal generalization)	GU (generalización universal)
Value-assignment	Asignación de valor
W (set of worlds)	MU (conjunto de mundos)
w_i, etc.	mu_i, etc.
wff (well formed formula)	fbf (fórmula bien formada)

PARTE I

LOGICA PROPOSICIONAL MODAL

CAPITULO PRIMERO

CALCULO PROPOSICIONAL NO MODAL

Los capítulos siguientes de este libro presupondrán una familiarización con al menos los rudimentos del Cálculo Proposicional "ordinario" (bivalente). Cuando usemos la expresión "Cálculo Proposicional" (o la abreviatura CP) *simpliciter,* será a este sistema de lógica no modal al que nos estaremos refiriendo. El presente capítulo esboza, de manera muy resumida, los elementos del CP que daremos ya por sabidos en el resto de la obra, y al mismo tiempo explica parte de la terminología que utilizaremos a través de todo el libro. No se pretende que este capítulo sea una introducción al CP; disponemos ya de muchos libros introductorios[1] y no pretendemos aumentar su número.

Cuando construimos un sistema lógico hacemos dos cosas distintas: (a) establecer un sistema de símbolos, con reglas para combinarlos en fórmulas y manipular estas formas de modos diversos; (b) damos una interpretación, o asignamos un significado, a estos símbolos y fórmulas.

Si nos limitamos a hacer (a) se dice que tenemos un sistema *sin interpretar.* Si hacemos las dos cosas (a) y (b) se dice que tenemos un sistema *interpretado.*

Esta distinción es importante. Hay cosas en un sistema modal que podemos probar considerándolo simplemente como sistema sin interpretar; hay otras cosas en él que no podemos probar a menos que tengamos en cuenta su interpretación también. Más aún, en general se pueden dar muy diversas interpretaciones a un sistema, y a veces es posible demostrar que un sistema posee determinadas características considerando alguna otra interpretación distinta a la que se le asignó al principio.

Tendremos presente esta distinción en la breve exposición del CP que vamos a hacer, y también en el resto del libro. El resultado práctico de esto será el de que aunque seleccionemos un sistema de símbolos y reglas determinado procuramos ser capaces de describir este sistema sin hacer referencia a la interpretación asignada, ni por supuesto a ninguna otra posible interpretación. Aunque a veces nos resultará conveniente dar a diversos símbolos y reglas nombres que sugerirán la interpretación que tenemos principalmente en cuenta, estos nombres pueden considerarse, cuando resulte adecuado, como denominaciones neutrales.

Símbolos primitivos y reglas de formación de CP

Tomamos como símbolos *primitivos* (o no definidos) de CP los siguientes:

---

[1] La mayor parte de los textos de lógica corrientes dan una explicación de CP con más o menos detalle. Un libro que utiliza casi la misma terminología que nosotros y que desarrolla CP de forma muy semejante (aunque por supuesto con mucha más amplitud) es Hughes & Londey [1965]. Para una explicación más detallada (y algunas notas históricas) *vide* Church [1956]. Otras introducciones apropiadas se encuentran en Quine [1940] [1950]. Ambrose & Lazerowitz [1948], Prior [1955] y Faris [1962]. La terminología y la notación varían un tanto pero esto no debe ser fuente de confusión para un lector atento.

Un conjunto de *letras*: p, q, r, ... (con o sin subíndices numéricos). Nos suponemos en posesión de un número ilimitado de ellas.

Los cuatro símbolos siguientes: $\sim$, $\vee$, (,).

A cualquier símbolo de esta lista, o a cualquier secuencia de estos símbolos le denominamos *expresión*. Una expresión o bien es una *fórmula* –más exactamente una *fórmula bien-formada* (fbf)– o de lo contrario no lo es. Nos ocupamos únicamente de las expresiones que son fbfs. Las siguientes *reglas de formación* de CP especifican qué expresiones han de considerarse fbfs:

RF1 Una letra que aparezca sola es una fbf.
RF2 Si α es una fbf también lo es $\sim\alpha$.
RF3 Si α y β son fbfs también lo es $(\alpha \vee \beta)$.

En estas reglas los símbolos α y β se usan para representar cualquier expresión. Así pues el significado de RF2 es: El resultado de prefijar con $\sim$ a cualquier fbf es él mismo una fbf. Los símbolos que se usan tal como α y β se usan aquí se conocen como variables *meta-lógicas*. No se encuentran entre los símbolos del sistema (CP en este caso) pero se utilizan al hablar acerca del sistema.

Ejemplos de fbfs son: $p, \sim q, \sim\sim\sim q, (p \vee \sim q), ((p \vee r) \vee \sim(q \vee \sim(\sim r \vee p)))$. Por razones de conveniencia, sin embargo, nos permitimos omitir los paréntesis más externos de cualquier fbf completa (aunque no ningún otro paréntesis más interior). De esta simplificación notacional no resultará ninguna ambigüedad en la interpretación ni falta alguna de claridad.

Interpretación

Interpretamos las letras como variables cuyos valores son proposiciones. Normalmente las denominaremos *variables proposicionales*. Imaginamos que el lector está familiarizado con la noción de proposición, y no nos meteremos con las cuestiones filosóficas a que esta noción da lugar. Sinónimos hasta cierto punto de "proposición" son "enunciado " y "aserción", siempre que estas palabras se usen para referirse a *lo que se enuncia o se aserta*, no al *acto de enunciar o asertar*. Toda proposición es o bien verdadera o bien falsa, y ninguna proposición es a la vez verdadera y falsa. (De aquí que si algo no es ni verdadero ni falso, o puede ser a la vez verdadero y falso, no ha de considerarse como proposición en el presente contexto). La verdad y la falsedad se dice que son los *valores de verdad* de las proposiciones.

Ahora bien, es posible formar proposiciones más complejas a partir de las más sencillas. Por ejemplo a partir de la proposición de que Bruto mató a César podemos formar la proposición de que no se da el caso de que Bruto matara a César. Es ésta una proposición que es verdadera si la proposición original es falsa, y falsa en caso contrario. En general el poner "no se da el caso de que" delante de una sentencia dará como resultado una sentencia que expresa una proposición que es verdadera si la sentencia original expresa una que es falsa, y una proposición falsa si ocurre al revés.

De modo semejante a partir de la proposición de que Bruto mató a César y de la proposición de que Casio mató a César podemos formar la proposición de que o bien Bruto o bien Casio mataron a César. Esta proposición será verdadera SI[2] al

---

[2] SI es una abreviatura conveniente (en el original "iff" *N. del T.*) que utilizaremos regularmente para "si y sólo si".

menos una de las proposiciones originales es verdadera, y por tanto falsa SI ambas son falsas.

"No se da el caso de que" y "o bien... o bien..." cuando se usan del modo que acabamos de describir pueden denominarse *operadores formadores de proposiciones con proposiciones*, ya que producen nuevas proposiciones a partir de las que ya tenemos. Las proposiciones con las que opera un operador se denominan sus *argumentos*. Si un operador precisa un único argumento, como ocurre con "no se da el caso de que", se dice que es monádico; si, al igual que "o bien... o bien..." precisa dos, se dice que es diádico.

Nuestra explicación de estos operadores, "no se da el caso de que" y "o bien... o bien..." mostraba que el valor de verdad de una proposición formada por cualquiera de estos dos depende siempre únicamente del valor de verdad del argumento o argumentos del operador. En otras palabras, siempre que se nos dé el valor de verdad del argumento o argumentos podemos deducir el valor de verdad de la proposición compleja. Un operador que tenga esta propiedad se dice que es un operador *funcional de verdad* y las proposiciones que forma se dicen que son *funciones de verdad* de sus argumentos. No todos los operadores formadores de proposiciones son de este tipo. Por ejemplo, dada únicamente la verdad o la falsedad de la proposición de que Bruto mató a César no podemos deducir la verdad o falsedad de la proposición de que Napoleón creía que Bruto mató a César, y dado únicamente que dos proposiciones son ambas verdaderas no podemos deducir de ello ni la verdad ni la falsedad de la proposición de que la primera se sigue lógicamente de la segunda (aunque si se nos da que una proposición es falsa y otra verdadera, *podemos* deducir de ello que es falso que la primera se siga lógicamente de la segunda). Por tanto aunque "Napoleón creía que" y "se sigue lógicamente de" son operadores formadores de proposiciones con proposiciones (monádico y diádico, respectivamente) no son operadores *funcionales de verdad.*

Interpretamos $\sim$ y $\vee$ como "no se da el caso de que" y "o bien... o bien...", respectivamente, en los sentidos que hemos explicado, y normalmente los leeremos simplemente como "no" y "o". $\sim$ interpretado de este modo se denomina el *signo de la negación*; $\sim p$ se dice que es la *negación* de p. Utilizando 1 y 0 para los valores de verdad, verdad y falsedad respectivamente, podemos expresar el significado que asignamos a $\sim$ en la siguiente *tabla básica de verdad para la negación*:

	$\sim$
1	0
0	1

Aquí la columna izquierda registra los posibles valores de verdad de una proposición determinada, y la columna derecha señala los correspondientes valores de verdad de la negación de aquella proposición. Cuando $\vee$ se interpreta del modo que hemos descrito se conoce como el *signo de la disyunción* y sus argumentos se denominan *disyuntos* (disjuncts); $p \vee q$ se dice que es la disyunción de p y q. La tabla básica de verdad para la disyunción es:

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

Los posibles valores de verdad del primer disyunto se registran en la primera co-

lumna vertical izquierda y los del segundo en la primera línea horizontal. El valor de verdad de su disyunción se obtiene leyendo en diagonal de arriba a abajo.

Estas tablas básicas de verdad muestran claramente la naturaleza funcional de verdad de los operadores[3]. De hecho no solamente $\sim$ y $\vee$ sino todos los operadores de CP son funcionales de verdad, y por esta razón a CP se le denomina a veces la teoría de las funciones de verdad. Dijimos anteriormente que interpretamos, p, q, r,... como variables cuyos valores son proposiciones; pero en vista del hecho de que la única característica de los argumentos de los operadores relevante para el valor de verdad de las proposiciones complejas que forman es su valor de verdad, es igualmente satisfactorio, desde un punto de vista formal, considerar que las variables tienen como alcance (range) de valores, no todo el conjunto infinito de las proposiciones, sino únicamente los dos valores de verdad 1 y 0.

Nuevos operadores

Otros cuantos operadores pueden definirse en términos de los primitivos. Desde el punto de vista del sistema sin interpretar la ventaja que presenta el uso de estos nuevos operadores es que nos permite escribir muchas fbfs de un modo sucinto: es decir, desde el punto de vista de las definiciones nos proporcionan útiles abreviaturas notacionales. Desde el punto de vista del sistema interpretado tiene la ventaja además de hacer que el significado de muchas fbfs sea mucho más fácil de captar.

Introducimos tres nuevos operadores: $\cdot$, $\supset$ y $\equiv$, aunque también podríamos contar con otros varios además. Las definiciones son:

$$[\text{Def } \cdot] \quad (\alpha \cdot \beta) =_{\text{Df}} \sim(\sim \alpha \vee \sim \beta)$$
$$[\text{Def } \supset] \quad (\alpha \supset \beta) =_{\text{Df}} (\sim \alpha \vee \beta)$$
$$[\text{Def } \equiv] \quad (\alpha \equiv \beta) =_{\text{Df}} ((\alpha \supset \beta) \cdot (\beta \supset \alpha))$$

En estas definiciones α y β representan cualesquiera fbfs de CP. El símbolo "$=_{\text{Df}}$" se lee como "se define como". El significado de la primera definición es que siempre que tengamos una fbf de la forma $\sim(\sim - \vee \sim -)$ en la que los espacios en blanco se rellenan con cualquier fbf que queramos, podemos sustituir esta fbf por cualquier expresión que conste de la fbf que colocamos en el primer espacio en blanco seguida de un punto seguido de la fbf que colocamos en el segundo espacio en blanco, quedando toda la expresión entera encerrada entre paréntesis. Análogas explicaciones pueden darse para las otras dos definiciones. De modo semejante podemos convertir cualquier expresión de las que aparecen a la izquierda en la forma correspondiente de la derecha.

Las expresiones que pueden transformarse, mediante la aplicación de las definiciones, en fbfs tal como se especificó en las reglas originales de formación, han de considerarse ellas mismas fbfs. Cuando una fbf no contiene ningún símbolo que no sea primitivo se dice que está escrita en *notación primitiva*. Las definiciones nos permiten escribir todas las fbfs en notación primitiva si así lo deseamos.

Interpretación de $\cdot$, $\supset$ y $\equiv$

La interpretación que ya hemos dado para $\sim$ y $\vee$ determinará la interpretación que demos para los operadores definidos en términos de ellos. De este modo,

[3] Para ser estrictos deberíamos distinguir aquí entre el símbolo $\sim$ de CP y el operador formador de proposiciones "no es el caso que", que no es símbolo de ningún sistema lógico; pero cuando consideremos a $\sim$ interpretado como "no es el caso que" no debe causar confusión si nos referimos al símbolo también como operador (y otro tanto podríamos decir de $\vee$ y los demás símbolos que introduciremos).

podemos calcular los valores de verdad de $p \cdot q$ para todos los posibles valores de verdad de p y q calculando los apropiados valores de verdad de la fbf de la que $p \cdot q$ es una abreviatura, a saber, $\sim (\sim p \vee \sim q)$ y las tablas básicas de verdad de $\sim$ y $\vee$ nos permiten hacer esto. Así resulta que $p \cdot q$ será verdadera cuando tanto p como q sean verdaderas, y falsa en los demás casos. La tabla básica de verdad para $\cdot$ será por tanto:

$\cdot$	1	0
1	1	0
0	0	0

Cuando $\cdot$ se interpreta de este modo se le denomina el *símbolo de la conjunción*; puede leerse como "y". Una proposición formada con $\cdot$ se conoce como una *conjunción*, y los argumentos se denominan términos de la conjunción (conjuncts).

Consideraciones semejantes proporciona la siguiente tabla básica de verdad para $\supset$:

$\supset$	1	0
1	1	0
0	1	1

Es decir, una proposición formada con $\supset$ es falsa cuando el primer argumento es verdadero y el segundo falso, y verdadera en todos los demás casos. Así interpretado $\supset$ se conoce como el *signo de la implicación (material)*. Puede leerse como "implica (materialmente)" o como "si [el primer argumento], entonces [el segundo argumento]". El primer argumento se conoce como el *antecedente*, el segundo como el *consecuente*. La relación exacta de la implicación material con los diversos usos de la palabra "si" (como condicional, *N. del T.*) da lugar a complejas cuestiones en las que no entraremos aquí. Puede declararse, con plausibilidad, que la implicación material representa el componente funcional de verdad con el significado de "si" (condicional, correspondiente al "if" inglés, *N. del T.*) en por lo menos la mayoría de sus usos habituales.

La tabla básica de verdad para $\equiv$ resulta así:

$\equiv$	1	0
1	1	0
0	0	1

Es decir, una proposición formada con $\equiv$ es verdadera cuando ambos argumentos tienen el mismo valor de verdad, falsa cuando tienen diferentes valores de verdad. Cuando se le interpreta así $\equiv$ se conoce como el *signo de equivalencia (material)*. Puede leerse como "es (materialmente) equivalente a" o como "si y sólo si".

Evidentemente estos nuevos operadores, al igual que los primitivos, son funcionales de la verdad.

(Podríamos haber elegido otros operadores distintos a $\sim$ y $\vee$ como primitivos. Algunos autores, por ejemplo, toman $\sim$ y $\cdot$ como primitivos y definen $\vee$ en términos de éstos. Pero sean los que sean los operadores primitivos que utilicemos, siempre que a todos los operadores puedan dárseles consistentemente las tablas básicas de verdad enumeradas anteriormente, el sistema CP así obtenido será exactamente equivalente al que hemos reseñado aquí).

Validez

Si consideramos que las variables, $p, q, r, \ldots$ toman como valores todo el alcance (range) de las proposiciones, podemos decir que una fbf de CP se convierte en proposición cuando todas sus variables se sustituyen por proposiciones. Se dice que fbf es *válida* SI el resultado de todas esas sustituciones es una proposición verdadera. (Se presupone que la sustitución se llevará a cabo uniformemente, es decir que dos o más apariciones de la misma variable se sustituyen siempre por la misma proposición. Sin embargo, si en lugar de ello, consideramos que las variables toman solamente los valores de verdad 1 y 0 como valores, diremos que una fbf es válida SI siempre tiene el valor 1, independientemente de los valores de verdad que se le asignen (uniformemente) a sus variables. Normalmente consideraremos a las variables en este sentido; puesto que todos los operadores de CP son funcionales de verdad, resultarán válidas en todos los casos exactamente las mismas fórmulas. Ejemplos simples de fbfs válidas son $p \vee \sim p$ y $(p \cdot q) \supset p$ (A una fbf de CP válida se le denomina a menudo *tautología* o *tautología –CP).*

Se dice que una fbf es *insatisfactible* SI tiene siempre el valor 0, independientemente de los valores de verdad que se le asignen (uniformemente) a sus variables. Un ejemplo simple de una fbf insatisfactible es $p \cdot \sim p$. Muchas fbfs tales como $p \supset q$ no son, por supuesto, ni válidas ni insatisfactibles.

La noción básica en esta determinación de la validez es la de asignar un valor a cada variable de la fórmula y ser capaces, en consecuencia, de calcular el valor de la fórmula completa. Diremos que V es una *asignación de valor* para un conjunto de variables cuando a cada variable del conjunto V le asigna o bien el valor 1 o bien el valor 0. Escribimos "$V(p) = 1$" para "V asigna el valor 1 a p", "$V(q) = 0$" para "V asigna el valor 0 a q", y así sucesivamente. Diremos que V es una *asignación de valor CP* cuando además de satisfacer la condición anterior también satisface otras dos condiciones que reflejan las tablas básicas de verdad de $\sim$ y $\vee$. Podemos establecer explícitamente las condiciones para que V sea una asignación de valor CP como sigue:

1. Para toda variable proposicional, p_i (en un conjunto dado), o bien $V(p_i) = 1$ o bien $V(p_i) = 0$, pero no ambas cosas.
2. [V $\sim$]. Para cualquier fbf, α, $V(\sim \alpha) = 1$ si $V(\alpha) = 0$; de lo contrario $V(\sim \alpha) = 0$.
3. [V $\vee$]. Para cualesquiera fbfs, α y β, $V(\alpha \vee \beta) = 1$ si o bien $V(\alpha) = 1$ o $V(\beta) = 1$; en caso contrario $V(\alpha \vee \beta) = 0$.

Una asignación de valor CP puede satisfacer las condiciones 2 y 3 sólo de una manera, pero puede satisfacer la condición 1 de cualquiera de 2^n maneras, siendo n el número de variables que tengamos en consideración. Con respecto a n variables, por tanto, habrá 2^n asignaciones de valor CP distintas, que podemos denominar $V_1, \ldots, V_{2n}$, respectivamente; y cada una de éstas puede definirse exactamente especificando $V(p_i)$ como 1 ó 0 para cada variable p_i en el conjunto en consideración. Ahora bien todas las fbfs se pueden expresar en términos de variables, $\sim$ y $\vee$ solamente; así pues, una vez que hemos definido una asignación de valor particular, V, de este modo, podemos calcular $V(\alpha)$ como 1 ó 0, siendo α cualquier fbf cuyas variables todas aparecen en el conjunto. Si $V(\alpha) = 1$ diremos que V es una asignación de valor *verificativa* para α (o que V hace a α verdadera) y si $V(\alpha) = 0$ diremos que V es una asignación de valor *falseadora* (falsifying) para α (o que V hace falsa a α).

Podemos ahora definir la validez en CP (o validez-CP como normalmente la denominaremos) más precisamente, diciendo que una fbf, α, es válida-CP SI para cada asig-

nación de valor CP, V, con respecto a las variables que aparezcan en α, $V(\alpha) = 1$ (es decir, SI cada una de tales asignaciones hace verdadera a α).

En virtud de las definiciones de $\cdot$, $\supset$ y $\equiv$ podemos fácilmente desarrollar consiguientes condiciones para la asignación de valores para estos operadores, de modo semejante a $[V\sim]$ y $[V\vee]$. Estas serán:

4. $[V\cdot]$. Para cualesquiera fbfs, α y β $V(\alpha \cdot \beta) = 1$ si $V(\alpha) = 1$ y $V(\beta) = 1$; en caso contrario $V(\alpha \cdot \beta) = 0$.

5. $[V \supset]$. Para cualesquiera fbfs, α y β, $V(\alpha \supset \beta) = 1$ si o bien $V(\alpha) = 0$ ó $V(\beta) = 1$; en caso contrario $V(\alpha \supset \beta) = 0$.

6. $[V \equiv]$. Para cualesquiera fbfs, α y β, $V(\alpha \equiv \beta) = 1$ si $V(\alpha)$ es lo mismo que $V(\beta)$; en caso contrario $V(\alpha \equiv \beta) = 0$.

Puesto que todas las fbfs pueden escribirse en notación primitiva, en sentido estricto estas reglas son innecesarias; sin embargo son útiles para aplicar en la práctica.

Prueba de la validez (testing for validity): (i) el método de la tabla de verdad

En lo que se conoce como método de la tabla de verdad para probar la validez de una fórmula, CP, α, se registran todas las posibles asignaciones de valor CP con respecto a las variables de α, y para cada una de tales asignaciones de valor, V, se usan las reglas que acabamos de establecer (o lo que viene a ser lo mismo, las tablas básicas de verdad para los operadores) para calcular $V(\alpha)$ como 1 ó como 0. El resultado es la columna de unos y/o ceros, cada uno de los cuales representa a $V(\alpha)$ en alguna asignación de valor, V. Esta columna se conoce como *tabla de verdad* de la fbf. Si y sólo si consta únicamente de unos la fbf es válida.

Un ejemplo mostrará más claramente este procedimiento. Sea α $((p \supset q) \cdot r) \supset ((\sim r \vee p) \supset q)$. Aquí tenemos tres variables distintas, y por tanto ocho asignaciones de valor CP, V_1, ..., V_8. La construcción de la tabla de verdad se realiza del modo siguiente:

	p	q	r	$((p \supset q) \cdot r) \supset ((\sim r \vee p) \supset q)$					
(V_1)	1	1	1	1	1	1	0	1	1
(V_2)	1	1	0	1	0	1	1	1	1
(V_3)	1	0	1	0	0	1	0	1	0
(V_4)	1	0	0	0	0	1	1	1	0
(V_5)	0	1	1	1	1	1	0	0	1
(V_6)	0	1	0	1	0	1	1	1	1
(V_7)	0	0	1	1	1	1	0	0	1
(V_8)	0	0	0	1	0	1	1	1	0
				(1)	(2)	(6)	(3)	(4)	(5)

La lista completa de las asignaciones de valor se señala a la izquierda de la línea vertical. Las columnas de la derecha se numeran en el orden en que se obtienen. De este modo la columna (1), para $p \supset q$, se obtiene a partir de las columnas debajo de p y q de acuerdo con $[V \supset]$; la columna (2) se obtiene a partir de (1) y la columna bajo r, de acuerdo con $[V\cdot]$; ... hasta llegar finalmente a la columna (6), la tabla de verdad para la fbf completa, que se obtiene a partir de (2) y de (5). El primer 1 en (6) significa que $V_1(\alpha) = 1$, el segundo que $V_2(\alpha) = 1$, y así

sucesivamente. Puesto que (6) consta enteramente de unos V (α) = 1, siendo V cualquiera de las asignaciones V_1, ..., V_8, y por tanto α es válida–CP.

Prueba de la validez: (ii) El método de reducción

Una fórmula puede normalmente ser probada de un modo más rápido tratando de encontrar una asignación de valor falseadora (falsifying) para él. El método de la Reducción (Reduction method) nos permite encontrar tal asignación de valor si es que existe.

Comenzamos suponiendo que existe alguna asignación de valor V, para la cual V (α) = 0. Expresamos esta suposición escribiendo 0 debajo del operador principal de α. (En general, si β es cualquier parte bien-formada de α, escribimos 1 (ó 0) debajo del operador principal de β para significar que V (β) = 1 (ó 0)). Se siguen algunas consecuencias de esta suposición, de acuerdo con las tablas básicas de verdad, acerca de los valores que deben ser asignados a ciertas partes bien-formadas de α; es decir, si α es de la forma $\beta \supset \gamma$ podemos obtener V (α) = 0 sólo si contamos con V (β) = 1 y V (γ) = 0. A partir de estos nuevos valores se siguen otras consecuencias del mismo modo, y así sucesivamente, hasta que finalmente o bien (i) conseguimos una asignación de valor consistente para todas las variables de α (en cuyo caso α no es válida) o bien (ii) nos encontramos con que no podemos conseguir tal asignación de valor consistente (en cuyo caso α es válida.

Como ejemplo, sea α la fórmula que utilizamos para ilustrar el método de la tabla de verdad, es decir $((p \supset q) \cdot r) \supset ((\sim r \vee p) \supset q)$. Indicamos ahora inmediatamente la operación total y luego la explicamos.

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 6 & & 3 & 5 & 2 & 3 & 1 & & 8 & 9 & 4 & 7 & 2 & 4 \\ ((p & \supset & q) & \cdot & r) & \supset & ((\sim & r & \vee & p) & \supset & q) \\ 0 & & 1 & 0 & 1 & \underline{1} & 0 & & 1 & \underline{0} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Los numerales que aparecen por encima de la fórmula indican el orden de los pasos. El paso 1 es la asignación inicial de 0 a α. Puesto que α es de la forma $\beta \supset \gamma$, si V (α) = 0, debemos tener V (β) = 1 y V (γ) = 0 (paso 2). Se precisan los unos del paso 3 de acuerdo con [V], ya que β es una conjunción y V (β) = 1. Los restantes pasos se comprenderán fácilmente. Finalmente llegamos a la conclusión (indicada mediante el subrayado) de que si hemos de tener V (α) = 0 debemos tener tanto V (r) = 1 como V (r) = 0, lo cual va contra la condición 1 de las asignaciones de valor CP. Por tanto nunca podemos conseguir V (α) = 0 y α es por consiguiente válida.

Otros casos no son tan sencillos a veces. Supóngase que α es la conversa de la fórmula anterior, a saber $((\sim r \vee p) \supset q) \supset ((p \supset q) \cdot r)$. Los pasos 1 y 2 pueden realizarse como anteriormente, pero los valores del paso 2 no determinan valores posteriores de modo unívoco. No obstante podemos dar una lista exhaustiva de todos los posibles valores para el paso 3 mediante el presupuesto de que $V((\sim r \vee p) \supset q) = 1$, como sigue:

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & 3 & & 2 & 3 & 1 & & 2 \\ & & ((\sim & r & \vee & p) & \supset & q) & \supset & ((p \supset q) \cdot r) \\ \text{(a)} & & & 1 & & 1 & 1 & 0 & & 0 \\ \text{(b)} & & & 0 & & 1 & 1 & 0 & & 0 \\ \text{(c)} & & & 0 & & 1 & 0 & 0 & & 0 \end{array}$$

(a), (b) y (c) representan todas las asignaciones de valor para $(\sim r \vee p)$ y q que

son compatibles con V $((\sim r \vee p) \supset q)=1$. Si todas éstas nos llevan a inconsistencia, α es válida; si aunque sea una sola de ellas es compatible con una asignación consistente para las variables, α no es válida. De hecho tanto (b) como (c) llevan a inconsistencias; pero no (a) que es compatible con $V(q)=1, V(r)=0$ y $V(p)=1$ ó 0. Por tanto la fórmula completa no es válida.

Siempre que consideremos en este sentido todas las asignaciones de valor posibles (alternativas) que vayan surgiendo conforme surja la necesidad, podemos probar (test) la validez de cualquier fbf de CP mediante el método de Reducción. Haremos un uso considerable de este método en los capítulos 5 y 6.

Cada uno de los métodos que hemos descrito nos proporciona un procedimiento efectivo (es decir mecánico y finito) para decidir acerca de cualquier fbf de CP si es válida o no. Otra manera de expresar esto sería el decir que cada uno de estos métodos nos proporciona un *procedimiento de decisión* para CP[4].

Sustitución de equivalentes

Resulta evidente a partir de la tabla básica de verdad de $\equiv$ que SI una fbf $(\gamma \equiv \delta)$ es válida, γ y δ tienen tablas de verdad idénticas. Por tanto, si α es una fbf cualquiera que contenga a γ y obtenemos β a partir de α simplemente sustituyendo γ por δ, entonces α y β serán equivalentes, en el sentido de que $(\alpha \equiv \beta)$ es válida. Cuando hagamos tal sustitución diremos que realizamos una *transformación de equivalencia* (de α en β).

Damos aquí una lista de algunas equivalencias válidas que son especialmente útiles para hacer tales transformaciones. En la mayoría de los casos mencionamos el nombre por el que normalmente se conoce la equivalencia, y damos una abreviatura mediante la cual nos referiremos habitualmente a ella en este libro.

CP1 $(p \cdot q) \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$
CP2 $(p \vee q) \equiv \sim(\sim p \cdot \sim q)$ } [Leyes de Morgan - De M]

CP3 $p \equiv \sim\sim p$ [Ley de la Doble Negación - DN]

CP4 $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
CP5 $(p \cdot q) \equiv (q \cdot p)$ } [Leyes Conmutativas - Conm]

CP6 $((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$
CP7 $((p \cdot q) \cdot r) \equiv (p \cdot (q \cdot r))$ } [Leyes Asociativas - Asoc]

CP8 $p \equiv (p \vee p)$

CP9 $p \equiv (p \cdot p)$

CP10 $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$ [Ley de Transposición - Transp]

CP11 $(p \cdot (q \vee r)) \equiv ((p \cdot q) \vee (p \cdot r))$
CP12 $(p \vee (q \cdot r)) \equiv ((p \vee q) \cdot (p \vee r))$ } [Leyes Distributivas - Distrib]

Cualquier muestra de sustitución de una fbf válida (es decir cualquier fbf formada a partir de una fbf válida mediante sustitución uniforme de una o más variables por fbfs) es ella misma válida. Podemos, por tanto, utilizar CP10 no simplemente

[4] También podemos decir que cada método es una solución al problema de la decisión par. la clase de fbfs válidas de CP. Cada clase de objetos tiene un problema de decisión (es decir,el problema de encontrar un método efectivo para decidir respecto a cualquier objeto arbitrario si es o no es miembro de esa clase) pero sólo nos interesaremos por el problema de la decisión para clases de fórmulas. Para algunas clases (tales como la clase de fbfs CP válidas) el problema de la decisión es soluble (es decir puede encontrarse un procedimiento de decisión) pero para otras no lo es. Si el problema de la decisión para la clase de fbfs válidas de un sistema lógico determinado es soluble se dice a menudo de ese sistema que es *decidible* (decidable); si es insoluble se dice del sistema que es *indecidible* (undecidable).

para sustituir $p \supset q$ por $\sim q \supset \sim p$ en cualquier fórmula sino para variar el orden del antecedente y consecuente de *cualquier* implicación, negando cada uno de ellos tal como lo hacemos; y de modo análogo con otras equivalencias válidas.

Repetidas aplicaciones de las Leyes Asociativas nos permiten reagrupar los disyuntos (disjuncts) o los términos de una conjunción (conjuncts) en cualquier fbf puramente disyuntiva (o conjuntiva) o en cualquier muestra de sustitución de tal fbf, de cualquier forma que deseemos. En vista de esto es conveniente omitir los paréntesis interiores en tales fbfs. Podemos entonces escribir por ejemplo, $p \vee q \vee r \vee s$ que debe interpretarse que significa que por lo menos una de las proposiciones p, q, r o s es verdadera y $p \cdot q \cdot r \cdot s$ que significará que p, q, r y s son todas verdaderas. Nuestras reglas de formación no nos permiten de momento tales expresiones, por tanto las introducimos mediante las definiciones:

$$(\alpha \vee \beta \vee \gamma) =_{\text{Df}} ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$$
$$(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) =_{\text{Df}} ((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)$$

Repetidas aplicaciones de Conm (junto con Asoc si fuera necesario) nos permiten reorganizar los términos de las disyunciones o de las conjunciones según cualquier orden.

En virtud de CP8 y CP9 cualquier fbf es equivalente a la disyunción (o conjunción) de sí misma y sí misma. En vista de ello hablaremos, cuando así resulte conveniente, de cualquier fbf (no disyuntiva) como de una disyunción con un argumento; a tal disyunción la denominaremos disyunción *degenerada*. De modo análogo hablaremos de conjunciones degeneradas.

Forma normal conjuntiva

Se dice que una fbf está en *forma normal conjuntiva* (FNC) si es una conjunción (posiblemente degenerada) cada uno de cuyos términos es una disyunción (también posiblemente degenerada), cuyos disyuntos presentan cierta forma específica.

Hemos definido "FNC" en términos generales primero, de modo que la definición sea aplicable a otros sistemas distintos a CP. En el tipo específico de FNC relevante para CP que denominaremos FNC–CP– cada disyunto debe ser o bien una variable proposicional o la negación de una variable proposicional. Por tanto las siguientes fbfs están en FNC–CP:

(1) p; (2) $p \cdot (q \vee p)$; (3) $p \vee q \vee r$;

(4) $(p \vee \sim p \vee q) \cdot (q \vee r \vee \sim r) \cdot (p \vee r \vee \sim r)$

Las fbfs en FNC–CP tienen esta importante propiedad: son válidas SI cada término de la conjunción contiene entre sus disyuntos alguna variable no negada y también la negación de esa variable. Así pues el último de los ejemplos acabados de dar es válido, pero los otros no lo son.

Mediante el uso de equivalencias tomadas de la lista que dimos en la sección anterior podemos transformar cualquier fbf de CP, α, en una fbf equivalente, α', que esté en FNC–CP[5]. Se dice entonces que α está *reducida* a FNC. Puesto que α es equivalente a α', será válida si α es válida. Ya que acabamos de establecer una prueba mecánica de la validez de fbfs en FNC–CP, la reducción a FNC nos proporciona otro procedimiento de decisión para CP.

Axiomatización de CP

Una *base axiomática* para un sistema lógico consta de (a) una lista de *símbolos*

[5] Para una prueba de esto *vide*, por ejemplo, Hughes and Londey [1965], págs. 365-7.

primitivos, junto con cualquier definición que pueda considerarse conveniente; (b) un conjunto de *reglas de formación*, que especifiquen qué fórmulas han de considerarse como fbfs; (c) un conjunto seleccionado de fbfs, conocidas como axiomas; y (d) un conjunto de reglas de transformación que permitan diversas operaciones con los axiomas, y también (normalmente) con fbfs obtenidas mediante previas aplicaciones de las reglas de transformación. Los fbfs que obtenemos mediante la aplicación de las reglas de transformación se conocen como *teoremas*. Una fbf que es o bien un axioma o bien un teorema de un sistema determinado se denomina frecuentemente *tesis* de aquel sistema.

Cuidamos el evitar cualquier tipo de referencia a la interpretación, al establecer reglas de formación y transformación, y por supuesto al especificar el sistema completo; esto es a menudo una cuestión de considerable importancia cuando tratamos de demostrar que un sistema axiomático posee determinadas propiedades. Cuando, por el contrario, tenemos en cuenta una interpretación, normalmente nos interesa construir un sistema deductivo de fbs *válidas*. Por ello seleccionamos como axiomas fbfs que de acuerdo con la interpretación en cuestión sean válidas, y hacemos que las reglas de transformación sean tales que cuando se apliquen a fbfs válidas los teoremas que den como resultado sean igualmente siempre válidos. Tales reglas de transformación se dice que son *preservadoras de la validez*.

El sistema PM

Probablemente la más conocida axiomatización de CP se deriva de *Principia Mathematica*[6] de Whitehead y Russell. Le denominamos a ésta *Sistema PM*.

Los símbolos primitivos, definiciones y reglas de transformación son como los que dimos anteriormente en este capítulo.

Hay cuatro [7] axiomas:

A1 $(p \vee p) \supset p$
A2 $q \supset (p \vee q)$
A3 $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
A4 $(q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$

Hay dos reglas de transformación primitivas (es decir dadas inicialmente):

RT1 *La Regla de la Sustitución* (*Uniforme*): El resultado de sustituir uniformemente cualquier variable de una tesis por cualquier fbf es él mismo una tesis[8].

---

[6] Whitehead and Russell [1910]

[7] El sistema original tal como aparecía en *Principia Mathematica* contenía asimismo un quinto axioma, a saber $(p \vee (q \vee r)) \supset (q \vee (p \vee r))$; pero posteriormente se vio que éste era innecesario. Para un esbozo histórico del desarrollo de CP *vide* Church [1956] págs. 155-166.

[8] Esta regla refleja el principio que establecimos anteriormente de que cada muestra de sustitución de una fbf válida es ella misma válida. De este modo si $(p \vee p) \supset p$ (A1) es válida también lo es $(q \vee q) \supset q$ o $((p \,.\, q) \vee (p \,.\, q)) \supset (p \,.\, q)$, o de hecho cualquier fbf de la forma $(\alpha \vee \alpha) \supset \alpha$, donde α es cualquier fbf. De acuerdo con RT1, si $(p \vee p) \supset p$ es una tesis, también lo es cualquier fbf de la forma $(\alpha \vee \alpha) \supset \alpha$; y lo mismo es válido para cualquier otro axioma o teorema. En algunas axiomatizaciones de CP, A1 se sustituye por una regla que indica que cualquier fbf de la forma $(\alpha \vee \alpha) \supset \alpha$ es una tesis, A2 por la regla de que cualquier fbf de la forma $\beta \supset (\alpha \vee \beta)$ es una tesis, y así sucesivamente. Tal regla se denomina *esquema de axioma* (axiom-schema) (*vide* Church [1956], págs. 148-151). Si todos los axiomas se escriben como esquemas, RT1 se vuelve innecesaria y RT2 puede ser la única regla de transformación. Todos estos modos de establecer la base producen exactamente las mismas fórmulas como tesis, y por lo que se refiere a CP hay poco que elegir de entre ellos. A través de toda la I Parte estableceremos todos los axiomas en términos de variables particulares y tendremos una regla de sustitución, aun cuando los sistemas que discutamos hayan sido originalmente establecidos mediante esquemas de axiomas.

RT2 *La Regla del Modus Ponens (o Separación)*: Si α y $(\alpha \supset \beta)$ son tesis también lo es β.

Enumeramos aquí algunos teoremas de PM que serán utilizados en capítulos inmediatamente posteriores. Puesto que las equivalencias numeradas CP1–CP12 de la pág. 25 son también teoremas de PM, numeramos la presente lista a partir de aquéllas:

CP13 $p \equiv p$ [Ley de Identidad - Id]
CP14 $p \supset (p \vee q)$
CP15 $(p \cdot q) \supset p$
CP16 $(p \cdot q) \supset q$
CP17 $p \supset (q \supset p)$
CP18 $\sim p \supset (p \supset q)$
CP19 $p \supset (q \supset (p \cdot q))$ [Ley de Adjunción - Adj]
CP20 $(p \supset (q \supset r)) \equiv (q \supset (p \supset r))$ [Ley de Permutación - Perm]
CP21 $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$ [Leyes del Silogismo - Sil]
CP22 $(q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
CP23 $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \cdot q) \supset r)$ [Ley de Importación - Imp]
CP24 $((p \cdot q) \supset r)) \supset (p \supset (q \supset r)$ [Ley de Exportación - Exp]
CP25 $(p \supset q) \supset ((p \supset r) \supset (p \supset (q \cdot r)))$ [Ley de Composición - Comp]
CP26 $(p \supset q) \supset ((r \supset s) \supset ((p \cdot r) \supset (q \cdot s)))$
CP27 $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$
CP28 $(\sim p \equiv q) \equiv (p \equiv \sim q)$
CP29 $(p \equiv q) \equiv (\sim p \equiv \sim q)$
CP30 $(\sim p \supset p) \equiv p$
CP31 $((q \supset p) \cdot (\sim q \supset p)) \equiv p$
CP32 $((p \supset q) \cdot (p \supset \sim q)) \equiv \sim p$

Consistencia

En el sentido que es probablemente el más natural de la palabra, considerando la interpretación usual de CP, se dice que un sistema axiomático es *consistente* SI ninguna tesis es la negación de cualquier otra tesis. (Establecida sin referencia a la interpretación la condición es que para ninguna fbf α son tesis a la vez α y $\sim\alpha$[9]).

PM es consistente en este sentido. La manera más sencilla de demostrarlo es hacer ver que (a) todos los axiomas son válidos; (b) las reglas de formación son preservadoras de la validez[10] y (c) si una fbf α es válida, entonces $\sim\alpha$ no es válida.

---

[9] Más generalmente, cuando * es cualquier operador (o complejo de operadores) podemos decir que un sistema es consistente con respecto a * SI para ninguna fbf, α, son a la vez demostrables α y $*\alpha$ (cf. Church [1956], pág. 108). Pero en CP, $\sim$ es el único operador que da sentido a esta definición.

[10] Es aplicable una prueba de este tipo porque cualquier teorema de PM será el resultado de tomar un número de objetos iniciales (los axiomas) y aplicar a ellos un número finito de operaciones determinadas (las reglas de transformación). En esencia la prueba consiste en mostrar: (a) que una propiedad determinada (en este caso la validez) se da en un conjunto de objetos iniciales, y (b) que si la propiedad se da hasta un cierto estadio se da en el siguiente. Una prueba de este tipo es una prueba mediante *inducción* (matemática) o más sencillamente una prueba *inductiva*. En el presente caso es una *inducción en la demostración en PM* de las fórmulas. Otra forma que podría tomar una prueba inductiva sería la de mostrar (a) que una determinada propiedad se da en todas las variables CP y mostrar luego (b) (i) que si la propiedad

(Otros dos sentidos más, al menos, han sido dados a la palabra "consistente" por los lógicos, aplicada a sistemas axiomáticos. En uno de ellos se dice que un sistema es consistente SI ninguna fbf que conste de una sola variable proposicional es una tesis. En el otro se dice que un sistema es consistente SI no todas las fbfs son tesis. Puede demostrarse fácilmente que PM es también consistente en estos dos sentidos).

Completitud (Completeness)

Distinguimos entre *completitud limitada* (weak completeness) y *completitud total* (strong completeness) de un sistema axiomático.

Decir que un sistema axiomático es limitadamente (weakly) completo es decir que todas las fbf válidas del sistema son derivables como tesis.

PM es limitadamente completo. Ocuparía demasiado espacio probar esto aquí, pero el modo más corriente de hacerlo es demostrar (a) que todas las fbfs en FNC–CP son derivables como teoremas, y (b) que si una fbf en FNC–CP es derivable como teorema también lo es cualquier fbf que pueda ser reducida a ella mediante determinadas transformaciones de equivalencia que son suficientes para reducir cualquier fbf a FNC–CP. La prueba de (b) implica (i) derivar como teoremas la mayor parte de las equivalencias enumeradas anteriormente en este capítulo y también (ii) demostrar que PM posee una importante característica que vale la pena destacar aparte. Esta es la de que la siguiente regla de Sustitución de Equivalentes (comprobados) es válida en él:

Si α es una tesis y β se diferencia de α solamente en poseer alguna fbf, δ, en uno o más lugares en los que α tiene una fbf, γ, entonces si $(\gamma \equiv \delta)$ es una tesis, β es una tesis.

Decir que dos fbfs, γ y δ, son equivalentes comprobadas es simplemente decir que $(\gamma \equiv \delta)$ es una tesis. Lo que la regla establece es que si sustituimos cualquier parte bien-formada de una tesis por una parte equivalente comprobada de aquella parte, el resultado es así mismo una tesis. En contraste con RT1 esta regla no requiere que las sustituciones permitidas se hagan uniformemente.

Esta no es una de las reglas de transformación primitiva de PM, pero puede establecerse como *regla de transformación derivada*; es decir puede demostrarse de un modo general que cualquier teorema que pueda obtenerse utilizándola podría también haber sido obtenido, aunque dando más rodeos, utilizando únicamente las reglas de Sustitución y el Modus Ponens.

Decir que un sistema axiomático es totalmente (strongly) completo es decir que no puede tener más tesis de las que tiene sin caer en inconsistencia. Más exactamente, es decir que si una fbf cualquiera que no sea derivable de la base se añade a los axiomas, el sistema ya no sería consistente. Puesto que la "total completitud" se define en términos de consistencia, habrá tres sentidos de "totalmente completo" correspondientes a los tres sentidos de "consistente" que mencionamos anteriormente.

PM es totalmente completo en esos tres sentidos[11]. La mayor parte de los

---

se da en cualquier fbf α se da también en $\sim\alpha$, y (b) (ii) que si se da en cualesquiera fbfs α y β entonces se da en $(\alpha \vee \beta)$. Esto demostraría que la propiedad se daría en toda fbf CP cualquiera que fuera. Denominamos a una prueba tal *inducción en la construcción de fbfs CP.* De vez en cuando tendremos ocasión de usar pruebas inductivas en éstas y otras formas.

[11] Y más generalmente cualquier base axiomática para CP limitadamente (weakly) completa que contenga a RT1 y RT2 será totalmente (strongly) completa.

sistemas discutidos en este libro, sin embargo, no son totalmente completos, y no se pueden transformar en totalmente completos sin hacerlos inapropiados para la función que deseamos que desempeñen.

Los sistemas que vamos a discutir contienen fórmulas que no son puramente fórmulas CP. Pero, desde luego, los principios generales de CP resultan válidos para estas fórmulas también, y deseamos poder servirnos de tales principios siempre que resulte conveniente. Una forma de asegurarnos el poder hacer esto es el incorporar la base de algún sistema CP axiomático satisfactorio a las bases axiomáticas de los nuevos sistemas. Así es como procederemos normalmente, y utilizaremos la base PM de CP para tal objeto[12]. Diremos entonces que el nuevo sistema se construye sobre, o es una extensión de, PM, o que los nuevos axiomas, reglas, etc. del sistema están *añadidas* a los de PM.

12 Pero cualquier otra base consistente y completa para CP servirá igualmente bien. Se conocen un número considerable de ellas.

CAPITULO II

EL SISTEMA T

En el resto de la I Parte nos ocuparemos de unos cuantos sistemas de la lógica proposicional modal. El presente capítulo tratará principalmente del primero de éstos (el Sistema T); pero antes de nada daremos una visión general de las nociones modales que estos sistemas tratarán de expresar.

Nociones modales básicas

Entre las proposiciones verdaderas podemos distinguir por una parte las que simplemente *se da el caso de* que son verdaderas y por otra parte las que *tienen que ser* (are bound to be) verdaderas (o que no podrían ser falsas). De modo semejante entre las proposiciones falsas podemos distinguir por una parte aquéllas que simplemente se da el caso de que son falsas y aquéllas que tienen que ser falsas (o que no podrían ser verdaderas). A una proposición que tiene que ser ververdadera la denominamos proposición *necesariamente verdadera*, o *verdad necesaria*, o simplemente proposición *necesaria*; a una que tenga que ser falsa la denominamos proposición *imposible*; y a una que no tenga que ser ni necesaria ni imposible la denominamos proposición *contingente*. Algunas proposiciones contingentes serán, por supuesto, verdaderas y otras falsas. Si una proposición no es imposible decimos que es una proposición *posible*. Aquí "posible" no significa "simplemente posible", si por decir que p es simplemente posible se entiende que de hecho es falsa aunque podría haber sido verdadera. Las proposiciones posibles en el sentido que aquí les damos incluyen todas las proposiciones verdaderas (y *a fortiori* incluyen todas las proposiciones necesarias). En realidad incluyen todas las proposiciones *excepto* las imposibles.

"Necesidad" en el presente contexto significa lo que a menudo se denomina necesidad *lógica*. No nos proponemos aquí dar una visión adecuada de la naturaleza de la necesidad lógica —es éste un tema que da siempre lugar a problemas filosóficos. El sentido en que utilizamos el término "necesario" puede quedar suficientemente explicado indicando que cuando decimos que una determinada proposición es necesaria no queremos significar con ello que de continuar las cosas como están, o permaneciendo el mundo como hasta ahora, no pueda dejar de ser verdadera, sino, más bien, que no podría dejar de ser verdadera, *independientemente de como* estén las cosas, o *independientemente* de lo que resulte ser del mundo. Por ejemplo, aunque la proposición de que ningún cuerpo puede moverse a mayor velocidad que la luz está apoyada en una evidencia científica tan sólida que nos inclinamos a decir que en cierto sentido es *imposible* que un cuerpo se mueva más rápido que la luz, sin embargo esta proposición no se considerará necesaria en el sentido que nosotros damos al término, ya que las razones que la apoyan consisten en hechos del universo físico tal como es, y el universo físico bien podría haber sido otro distinto al que es de hecho. Las proposiciones de que todos los solteros son no

casados (all bachelors are unmarried), de que no existen cuadrados redondos, y de que o bien es jueves o no es jueves, se considerarán, sin embargo, verdades necesarias en el sentido en que nosotros utilizamos el término necesidad.

De modo semejante por "imposibilidad" entendemos la imposibilidad *lógica*; por "contingencia" la contingencia *lógica*; y por "posibilidad" la posibilidad *lógica*. El sentido de estas expresiones se comprenderá fácilmente teniendo en cuenta lo que hemos dicho para el caso de la necesidad.

Estas cuatro nociones –necesidad, imposibilidad, contingencia y posibilidad– se dice que son nociones modales[13]. Es evidente que están íntimamente relacionadas entre sí; en realidad podríamos explicar tres cualesquiera de ellas en términos de la cuarta. De particular importancia es la siguiente relación entre la necesidad y la posibilidad: decir que una proposición p es necesariamente verdadera es equivalente a decir que no es posible que p sea falsa; y decir que p es posible (o posiblemente verdadera) es equivalente a decir que no es una verdad necesaria el que p sea falsa.

Otra importante noción modal es la de *vinculación* (entailment). Por ella entendemos la conversa de la relación de "se sigue lógicamente de"; es decir, decir que una proposición, p, vincula (entails) a una proposición, q, es simplemente otra manera de decir que q se sigue lógicamente de p, o que la inferencia de q a partir de p es válida, lógicamente.

Dada una proposición cualquiera, p, podemos, por supuesto, formar la proposición de que p es necesaria, es decir, la proposición que expresamos como "es necesario que p". Esta proposición será verdadera cuando la propia p sea *necesaria* y *falsa* cuando p no sea necesaria. "Es necesario que" es por tanto un operador (monádico) formador de proposiciones con proposiciones. No es, sin embargo, un operador funcional de verdad, ya que aunque de la falsedad de p se sigue que p no es necesaria (es decir que "es necesario que p" es falsa), sin embargo si sólo se nos da que p es verdadera no podemos decidir si p es o no es necesaria– es decir, de la verdad de p no podemos deducir ni la verdad ni la falsedad de "es necesario que p".

De modo semejante "Es posible que" es también un operador monádico formador de proposiciones con proposiciones, y "Es posible que p" será verdadera cuando p sea posible, y falsa cuando p sea imposible. Y tampoco es funcional de verdad. "Vincula" (entails) y "se sigue lógicamente de" son operadores diádicos formadores de proposiciones y tampoco son funcionales de verdad; de hecho, ya llamamos la atención sobre la no funcionalidad de verdad de "se sigue lógicamente de" (y por tanto de "implica" (entails)) en la pág. 19.

Denominamos a estos operadores operadores modales y a los sistemas de lógica que vamos a considerar sistemas modales o lógicas modales. Los sistemas estarán todos basados en el cálculo proposicional tal como se expone en el Capítulo I; es decir, incluirán todas las fbfs de CP, con la misma interpretación que antes (de modo que las fbfs válidas de CP continúan siendo válidas en los sistemas modales), y las reglas de transformación primitivas de CP, es decir sustitución uniforme y separación (detachment). Hemos, sin embargo, observado que los operadores modales no son funcionales de verdad, y esto significa que no pueden ser representados por los operadores del CP ($\sim$, $\vee$ y complejos a partir de éstos) ya que éstos *son* todos funcionales de verdad. Por tanto para obtener una lógica modal (es decir,

[13] En la lógica medieval la necesidad, etc., se consideraban como los *modos* en que una proposición podía ser verdadera o falsa.

una lógica en la que podamos expresar proposiciones tales como "Es necesario que p") tendremos que añadir nuevos operadores a CP y ampliar nuestro tipo de fórmulas. Introduciremos los símbolos L y M (como operadores monádicos) y $\dashv$ (como operador diádico) con la intención de interpretarlos como "es necesario que", "es posible que" y "vincula" (entails) respectivamente, y les permitimos que tomen como argumentos fórmulas cualesquiera. De este modo podemos tener fbfs tales como $Lp \vee q$ (significando "o bien p es necesaria o q (es verdadera)"), $M(p \cdot q) \dashv Mq$ (significando "la proposición de que p es posible se sigue lógicamente de la proposición de que p y q es posible") y así sucesivamente. En vista de la interpretación que se les da denominaremos a L el *operador de la necesidad* y a M el *operador de la posibilidad*[14].

Sistemas de lógica modal

¿Qué fórmulas modales hemos de considerar válidas? . Es fácil dar una visión general, intuitiva, de la validez, exactamente igual como hicimos inicialmente para *CP,* diciendo que una fórmula es válida *SI* "resulta verdadera" para todos los valores de sus variables. En *CP,* a causa de la naturaleza funcional de verdad de los operadores, la visión inicial nos llevaba directamente a una definición formal muy simple de la validez. Podíamos entonces establecer un sistema axiomático e investigar si éste equivalía al criterio de que la clase de las tesis coincidiese exactamente con la clase ya definida de fórmulas válidas.

A causa de la no funcionalidad de verdad de los operadores modales, sin embargo, la visión inicial no nos lleva a ninguna definición formal evidente de validez para fórmulas modales que proporcione siempre conclusiones no ambiguas. Existen, sin embargo, ciertas condiciones que parece intuitivamente razonable exigir que cumpla un sistema para poder ser interpretado como sistema modal. Estas condiciones, que en seguida enumeraremos, requerirán que ciertas fórmulas sean consideradas como válidas (o como tesis, si el sistema se establece axiomáticamente) y que otras determinadas no lo sean; pero para algunas fórmulas dejarán sin decidir la cuestión de su validez o invalidez. Construiremos después (en este capítulo y en el siguiente) unos cuantos sistemas modales axiomáticos, cada uno de los cuales satisface todos estos requisitos pero que se diferencian entre sí por la presencia o ausencia como tesis de algunas de las fórmulas menos evidentemente válidas. Hasta que hayamos hecho esto no volveremos al problema de definir la validez de un modo preciso. De este modo en vez de juzgar un sistema axiomático según una definición de validez, como hicimos en el caso de CP, por el contrario juzgaremos diversas definiciones de validez de acuerdo con sistemas axiomáticos ya construidos.

Los requisitos intuitivos a que nos hemos referido son los siguientes[15] (algunos de ellos ya han sido anticipados en nuestras anteriores indicaciones):

1. Ya hemos mencionado la relación entre la necesidad y la posibilidad. Esto nos lleva a exigir que si L y M han de ser interpretados como los operadores de la necesidad y la posibilidad, las siguientes equivalencias deben ser válidas:

---

[14] Muchos autores utilizan $\Box$ y $\Diamond$ cuando nosotros utilizamos L y M respectivamente. Para una explicación de notaciones alternativas en lógica modal, *vide* Apéndice 4.

[15] Lo que parece intuitivamente razonable varía notablemente de persona a persona. El lector que no encuentre todos los requisitos de nuestra lista aceptables verá en la III Parte que existen diversos sistemas modales que no los cumplen todos. Desde un punto de vista formal los requisitos simplemente demarcan una clase de sistemas con el propósito de reducir la materia a proporciones manejables.

$$Lp \equiv \sim M \sim p$$
$$Mp \equiv \sim L \sim p$$

Los sistemas que contengan estas equivalencias no es necesario que tengan a ambos L y M como primitivos; tales sistemas podrían tomar a L como primitivo e introducir M mediante la definición

$$M\alpha =_{\mathrm{Df}} \sim L \sim \alpha$$

o tomar a M como primitivo y definir L mediante

$$L\alpha =_{\mathrm{Df}} \sim M \sim \alpha$$

A un sistema que haga lo primero le denominamos un sistema *de base L;* a uno que haga lo segundo sistema *de base M.* Los sistemas que desarrollaremos en unos cuantos capítulos siguientes serán en realidad de base L, pero en cada uno de ellos podríamos dar una exposición exactamente paralela tomando a M como primitivo en vez de a L.

2. También ya hemos indicado que deseamos poder interpretar $\dashv$ como "vincula" (entails) o "implica necesariamente". Ha habido numerosas controversias filosóficas acerca del análisis correcto de la vinculación (entailment)[16], pero algo que no se discute es que siempre que p vincula a (entails) q es imposible que sea p verdadera sin que q sea verdadera también. Esto nos llevará a exigir como válido:

$$(p \dashv q) \supset \sim M\ (p \cdot \sim q)$$

Lo que sí ha sido discutido es si el caso inverso es también válido, es decir si siempre que es imposible que p sea verdadera sin que q sea verdadera, debemos decir que p vincula a q. Desde luego resultará una lógica modal más simple si partimos del supuesto de que esto efectivamente es válido —o si (sin meternos en controversias)— interpretamos que $\dashv$ representa la relación que se da entre p y q *cuando y sólo cuando* es imposible que p sea verdadera sin que q sea verdadera; y esto es lo que haremos. Consideraremos entonces como válido:

$$(p \dashv q) \equiv \sim M (p \cdot \sim q)$$

y en vista de esta equivalencia no tendremos que tomar $\dashv$ como primitivo sino que podemos definir a $(\alpha \dashv \beta)$ como $\sim M (\alpha \cdot \sim \beta)$ (Otra definición equivalente de $(\alpha \dashv \beta)$ sería $L (\alpha \supset \beta)$, ya que $\sim M(p \cdot \sim q)$ se transforma fácilmente en $L (p \supset q)$ mediante $Mp \equiv \sim L \sim p$ y las equivalencias CP habituales[17]). Cuando $\dashv$ se

---

16 Para una breve reseña de esto *vide infra* págs. 274-277.

17 Es importante no confundir $L (p \supset q)$, que significa que toda la hipótesis "si p entonces q" es una verdad necesaria, o que q se sigue lógicamente de p, con $p \supset Lp$, que significa que si p es verdadera entonces q es una verdad necesaria. Desgraciadamente esto se confunde a menudo en el discurso ordinario, a veces con desastrosas consecuencias; y el olvido de esta distinción viene ayudado por la ambigüedad de expresiones comunes tales como "si... entonces debe ser (o ha de ser) el caso que—". Para agravar más las cosas todavía, la estructura de tales sentencias guarda mucha más semejanza con la de $p \supset Lp$, pero uno sospecha que casi siempre lo que el hablante intenta afirmar (o por lo menos todo lo que está autorizado a afirmar) es algo de la forma $L(p \supset q)$. Así pues, alguien que diga "si llueve todo diciembre ha de llover el día de Navidad" probablemente quiera decir que "lloverá el día de Navidad" se sigue de "lloverá todo diciembre" (lo cual es verdad ya que el día de Navidad cae en diciembre); pero podría considerarse que está afirmando que si llueve todo diciembre entonces es una verdad necesaria que lloverá el día de Navidad (lo cual es falso, aun cuando efectivamente llueva todo diciembre, ya que, pase lo que pase con el tiempo "lloverá el día de Navidad" sigue siendo una proposición contingente, no una proposición necesaria).

Quizá nadie, excepto en sus momentos más torpes, se dejaría engañar por este ejemplo. Pero la gente al parecer ha confundido la verdad necesaria de "si una cosa va a ocurrir va a ocurrir"

interpreta de este modo se denomina normalmente el signo de la *implicación estricta* y se lee como "implica estrictamente". A fin de evitar cuestiones filosóficas nos referiremos a la relación expresada mediante $-\!\!\supset$ como a la "implicación estricta" y abandonaremos la palabra "vinculación" (entailment) de ahora en adelante. Cuando menos la implicación estricta es un concepto íntimamente relacionado con el de vinculación (entailment) y si no es idéntico a éste (aunque bien pudiera serlo) es a la vez el más claro de los dos y el más fácil de expresar en un sistema lógico.

Cuando dos proposiciones se implican estrictamente la una a la otra decimos que cada una de ellas es *estrictamente equivalente* a la otra. Utilizamos $=$ como signo de la equivalencia estricta y lo introducimos mediante la definición:

$$(\alpha = \beta) =_{Df} ((\alpha \ -\!\!\supset \ \beta) \cdot (\beta \ -\!\!\supset \ \alpha))^{18}$$

Otra definición, que en los sistemas que vamos a considerar proporcionará exactamente el mismo resultado es:

$$(\alpha = \beta) =_{Df} L\,(\alpha \equiv \beta)$$

3. También hemos indicado que los operadores modales no son funcionales de verdad. Esto significa que en cualquier sistema modal intuitivamente plausible Lp no debe ser equivalente a ninguna función de verdad de p. (Puesto que todos los demás operadores modales son definibles en términos de L, es suficiente con establecer el requisito con relación a L). Ahora bien, sólo existen cuatro funciones de verdad de p: una es la conocida negación de p; una segunda función es la propia p (verdadera cuando y sólo cuando p es verdadera); la tercera es la función de verdad que es verdadera tanto cuando p es verdadera como cuando p es falsa; la cuarta es la función de verdad que es falsa tanto cuando p es verdadera como cuando p es falsa. De aquí que exijamos que ninguna de las siguientes sean válidas (ni sean tesis):

$$Lp \equiv \sim p$$
$$Lp \equiv p$$
$$Lp \equiv (p \vee \sim p)$$
$$Lp \equiv (p \cdot \sim p)$$

4. Aunque $Lp \equiv p$ no es válida, es evidente que una de las partes de su doble implicación, a saber $Lp \supset p$, lo es, ya que ésta simplemente expresa el principio de que cualquiera cosa que sea necesariamente verdadera es verdadera. Este axioma a menudo se denomina el *axioma de la necesidad.* Un principio análogo es el de que cualquier cosa que sea verdadera es posible; esto se expresa mediante la fórmula $p \supset Mp$ (el *axioma de la posibilidad*), que consideramos válido también. $Lp \supset p$ y $p \supset Mp$ pueden ser fácilmente derivados el uno del otro mediante equivalencias CP y las equivalencias que relacionen L y M.

---

con el punto de vista de que ocurra lo que ocurra, ocurre por necesidad lógica, o incluso han argumentado a favor del Fatalismo infiriendo ilícitamente de lo primero a lo segundo. Y en las discusiones epistemológicas el hecho (si es que es un hecho) de que, por necesidad, si alguien sabe que p entonces p es verdadero se ha presentado para mostrar algo que no se sigue de ello en absoluto, a saber, que solamente las verdades necesarias pueden llegar a conocerse. Se facilita esta transición si expresamos la premisa del argumento mediante la premisa ambigua pero más coloquial "si sabes algo, debe ser verdadero (no puede ser falso)". Aunque sólo sea un pequeño estudio de la lógica modal puede ayudarnos a no caer en trampas filosóficas y de todo otro tipo.

18 No deben confundirse $=$ y $=_{Df}$. El primero es un operador que aparece en fbfs de un sistema modal; el segundo es un símbolo meta-lógico que nunca aparece en fbfs sino que se utiliza únicamente en el discurso *acerca* de un sistema.

5. Otro principio que parece intuitivamente aceptable es que cualquier proposición que tenga la forma de una fórmula válida no es simplemente verdadera sino *necesariamente* verdadera. Esto significa que si α es una fórmula válida, entonces no solamente es verdadera toda proposición que tenga la forma α, sino toda proposición que tenga la forma $L\,\alpha$ también; y en ese caso la propia $L\,\alpha$ será válida. Por tanto contaremos con encontrar en la lógica modal el principio de que si α es válida, $L\,\alpha$ es también válida; y en un sistema modal axiomático esperaremos tener la regla de transformación (primitiva o derivada) de que si α es una tesis, $L\,\alpha$ también lo es.

6. Un último principio intuitivamente indudable es el de que todo lo que se siga lógicamente de una verdad necesaria es asimismo necesariamente verdadero. Si nenegásemos esto -es decir, si admitiésemos que una proposición contingente (ya no digamos una imposible) pudiera seguirse de una proposición necesaria– estaríamos violando un principio que se ha expresado a veces diciendo que en una inferencia válida la conclusión no corre mayor peligro de falsificación del que corren las premisas. Exigiremos, por tanto, que siempre que p sea necesaria y que p implique estrictamente a q, q sea también necesaria, es decir que

$$(Lp \cdot (p \dashv q)) \supset Lq$$

sea válida. Una variante de esta fórmula que se obtiene fácilmente, que es a menudo más útil, es:

$$L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$$

Un ejemplo de una fórmula cuya validez queda completamente sin determinar por las condiciones que hemos mencionado es $Lp \supset LLp$. Esta fórmula significa que si cualquier proposición determinada es una verdad necesaria entonces la proposición de que es una verdad necesaria es ella misma una verdad necesaria, o más sencillamente, que todo lo que es necesario es necesariamente necesario; y desde luego es difícil estar seguro basándose en fundamentos puramente intuitivos de si esto es o no es válido. El primer sistema que constituiremos no tendrá a esta fórmula como tesis, pero otros la tendrán.

Es conveniente al llegar a este punto explicar parte de la terminología que utilizaremos al tratar de los sistemas lógicos. Cuando una fórmula sea tesis de un determinado sistema diremos que *pertenece a,* o está *contenida en,* o simplemente que *está en,* dicho sistema. Si dos sistemas A y B tienen distintas bases pero contienen exactamente las mismas tesis diremos que A y B son *deductivamente equivalentes* o a veces diremos simplemente que son *equivalentes*[19]. Si todas las tesis del sistema A son tesis del sistema B pero algunas tesis de B no son tesis de A diremos que A es *el más débil* (weaker) y B *el más fuerte* (stronger) de los dos sistemas. Si todas las tesis de A son tesis de B (contenga o no contenga B otras tesis además) diremos que B *contiene a* A. De este modo dos sistemas con bases distintas son deductivamente equivalentes SI cada uno de ellos contiene al otro.

El Sistema T

El más débil de todos los sistemas que cumplen con todas las condiciones que

[19] Para algunos propósitos es conveniente considerar a sistemas deductivamente equivalentes como al mismo sistema y al poner nombres a los sistemas modales generalmente se hace esto. Para una ampliación de este punto *vide infra*, pág. 110.

hemos establecido, y el primero del que trataremos, es el *Sistema T*, que fue propuesto por vez primera por Robert Feys en 1937[20].

La base de T es como sigue:

Símbolos primitivos

$p, q, r, \ldots$	[variables proposicionales]
$\sim, L$	[operadores monádicos]
$\vee$	[operador diádico]
(,)	[paréntesis]

Reglas de formación

RF1 Una variable que aparezca sola es una fbf.

RF2 Si α es una fbf también lo son $\sim\alpha$ y $L\alpha$.

RF3 Si α y β son fbfs, también lo es $(\alpha \vee \beta)$.

Definiciones

Def., Def $\supset$, Def $\equiv$, como en CP (pág. 4) más:

[Def M] $\quad M\alpha = {}_{\mathrm{Df}} \sim L \sim \alpha$

[Def $\dashv$] $\quad (\alpha \dashv \beta) = {}_{\mathrm{Df}} L(\alpha \supset \beta)$

[Def $=$] $\quad (\alpha = \beta) = {}_{\mathrm{Df}} ((\alpha \dashv \beta) \cdot (\beta \dashv \alpha))$

Evidentemente toda fbf de CP es una fbf de T.

Axiomas

A1–A4 para PM (pág. 11), más:

A5 $Lp \supset p$ [El axioma de la Necesidad]

A6 $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$

Reglas de transformación

Como para PM, es decir, Sustitución Uniforme y Modus Ponens (págs. 11 y ss.) más:

RT3 *La Regla de la Necesariedad* (Necessitation) (N): Si α es una tesis, $L\alpha$ es una tesis.

En el futuro abreviaremos "α es una tesis" en la forma $\vdash \alpha$, y expresaremos la derivabilidad de una tesis de otra (o de otras) mediante el símbolo $\rightarrow$. Por tanto podríamos escribir RT3 abreviadamente como sigue:

$$\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\,\alpha$$

De modo semejante podríamos escribir la regla del Modus Ponens así:

---

20 Feys [1937] (*vide* esp. págs. 533-535). El nombre que le da a este sistema el propio Feys es "t" (fue llamado "T" por primera vez por Sobociński [1953]). Feys derivó el sistema suprimiendo uno de los axiomas de un sistema inventado por Gödel [1933] (pág. 39) con quien se origina la idea de axiomatizar la lógica modal mediante la adición a CP. Sobociński (op.. cit.) mostró que T es equivalente al sistema M de Von Wright [1951]; por esta razón "M" se utiliza a menudo como un nombre alternativo de T. Cf. *infra*, pág. 112.

La regla de la Necesariedad (Necessitation) no debe confundirse con la fbf no válida.

$$(1) \quad p \supset Lp$$

Ciertamente si tuviéramos (1) como tesis podríamos fácilmente derivar de ella la regla de la Necesariedad (Necessitation), ya que sustituyendo cualquier tesis, α, por p en (1) y aplicando el Modus Ponens derivaríamos $\vdash L\,\alpha$. Pero por supuesto (1) no es una tesis ni deseamos que lo sea.

Debe advertirse que siempre que tengamos una tesis de la forma $(\alpha \supset \beta)$ podemos usar TR3 para obtener $\vdash L\,(\alpha \supset \beta)$, y de aquí, mediante Def $\dashv$, $\vdash (\alpha \dashv \beta)$: Más aún, siempre que tengamos $\vdash (\alpha \dashv \beta)$ podemos, mediante Def $\dashv$, sustitución de $(\alpha \supset \beta)$ por p en A5 y Modus Ponens, obtener $\vdash (\alpha \supset \beta)$. Es decir, siempre que $(\alpha \supset \beta)$ sea una tesis, también lo será $(\alpha \dashv \beta)$ y viceversa. Es por tanto indiferente que derivemos tesis en la forma $(\alpha \supset \beta)$ o en la forma $(\alpha \dashv \beta)$. Normalmente las derivaremos en la forma $(\alpha \supset \beta)$, ya que las tesis CP se aplicarán a ellas más fácilmente.

Método para establecer pruebas

Estableceremos pruebas (*proofs*) de los teoremas del modo siguiente: Para empezar establecemos el teorema que ha de ser probado y le damos un número de referencia. Cada línea de la prueba consta a su vez de tres partes: (a) una fbf; (b) una justificación para escribir aquella fbf, anotada a la izquierda; (c) un número de referencia para aquella fbf, escrito inmediatamente antes que ellas. Todas las fbfs que consignamos en una prueba deben ser o bien (i) axiomas o (ii) teoremas previamente probados o (iii) fbfs derivadas de uno o más axiomas, teoremas previamente probados o fbfs que apareciesen en la prueba con anterioridad, mediante una o más reglas de transformación o mediante la aplicación de una definición. En los casos (i) y (ii) la anotación de la justificación consta simplemente del número de referencia o del nombre del axioma o teorema en cuestión. En el caso (iii) la anotación de la justificación hace referencia a los axiomas, etc. que están siendo usados registra las sustituciones hechas en ellos e indica qué reglas de transformación o definiciones están siendo aplicadas.

En las anotaciones de justificación utilizaremos las siguientes abreviaturas: La aplicación de la regla de sustitución se indicará mediante una raya, a cuya derecha se escribe la variable para la cual ha de hacerse la sustitución, y a la izquierda la fbf que ha de ser sustituida por ella, encerrando todo ello entre corchetes. El empleo de RT2 se indicará mediante "x MP", y el de RT3 mediante "x N".

Puesto que la base de PM está contenida en la base de T y PM es una base completa para CP, toda fbf válida de CP es tesis de T. Consideraremos, por tanto, cualquier fbf válida del CP que necesitemos, como ya probada y simplemente anotaremos "CP" con un número o nombre que hagan referencia a las listas del Capítulo 1 (págs. 25 y 28) como justificación cuando deseemos utilizar una de ellas[21]. Vale la pena observar que cualquier tesis implicativa de CP puede ser utilizada para generar una nueva tesis a partir de una o más de las antiguas tesis. Así pues, considérese CP 21, (Sil), a saber

$$(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$$

Supóngase que ya hemos derivado dos tesis de T: (1) $(\alpha \supset \beta)$ y (2) $(\beta \supset \gamma)$. Mediante la sustitución $(\alpha/p, \beta/q, \gamma/r)$ en Sil obtenemos

---

21 Cuando aparece una equivalencia en las listas, utilizamos el mismo número o nombre *para referirnos* a la correspondiente implicación. Evidentemente siempre que tengamos $\vdash (\alpha = \beta)$ también tenemos $\vdash (\alpha \supset \beta)$.

$$(\alpha \supset \beta) \supset ((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma))$$

Puesto que tenemos $\vdash (\alpha \supset \beta)$ y $\vdash (\beta \supset \gamma)$, dos aplicaciones de MP nos proporcionarán $\vdash (\alpha \supset \gamma)$. Para ahorrar espacio indicaremos toda esta secuencia de derivaciones simplemente mediante "(1), (2) x Sil". El usar Sil en este sentido puede considerarse igual que el usar una regla de transformación derivada que podría formularse como

$$\vdash (\alpha \supset \beta), \vdash (\beta \supset \gamma) \rightarrow \vdash (\alpha \supset \gamma)$$

De modo semejante, CP23 (Imp) puede utilizarse para transformar cualquier tesis de la forma $(\alpha \supset (\beta \supset \gamma))$ en la tesis correspondiente de la forma $((\alpha \cdot \beta) \supset \gamma)$ y tal transformación se indicará mediante "x Imp".

Ahora podrá ya el lector seguir las pruebas sin dificultad.

Pruebas de los teoremas

Como primer paso establecemos una regla de transformación derivada sumamente útil. Supóngase que $(\alpha \supset \beta)$ es una tesis. Entonces RT3 nos proporcionará $\vdash L (\alpha \supset \beta)$. La sustitución en A6 proporciona $\vdash (L (\alpha \supset \beta) \supset (L \alpha \supset L \beta)$. Por tanto mediante Modus Ponens obtenemos $\vdash (L \alpha \supset L \beta)$. Tenemos por tanto la siguiente regla:

RD1 $\vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (L \alpha \supset L \beta)$

Estableceremos otras diversas reglas derivadas conforme prosigamos.

T1 $p \supset Mp$

PRUEBA

A5 $[\sim p/p]$:	(1)	$L \sim p \supset \sim p$
(1) x Transp:	(2)	$\sim\sim p \supset \sim L \sim p$
CP3 (DN):	(3)	$p \supset \sim\sim p$
(3), (2) x Sil, Def M:	(4)	$p \supset Mp$ **Q.E.D.**

T2 $(p = q) \supset (Lp \equiv Lq)$

PRUEBA

A6, Def $\dashv$:	(1)	$(p \dashv q) \supset (Lp \supset Lq)$
(1), $[q/p, p/q]$:	(2)	$(q \dashv p) \supset (Lq \supset Lp)$
CP26:	(3)	$(p \supset q) \supset ((r \supset s) \supset ((p \cdot r) \supset (q \cdot s)))$
(1), (2) x (3):	(4)	$((p \dashv q) \cdot (q \dashv p)) \supset ((Lp \supset Lq) \cdot (Lq \supset Lp))$
(4), Def $=$, Def $\equiv$:	(5)	$(p = q) \supset (Lp \equiv Lq)$ **Q.E.D.**

T3 $L(p \cdot q) \equiv (Lp \cdot Lq)$

(En esta prueba primero derivamos $L(p \cdot q) \supset (Lp \cdot Lq)$ en la línea (3), luego la inversa en la línea (7) y finalmente reunimos estos dos resultados en una equivalencia).

PRUEBA

CP15 x RD1:	(1)	$L(p \cdot q) \supset Lp$

CP16 x RD1:	(2)	$L(p \cdot q) \supset Lq$
(1), (2) x Comp:	(3)	$L(p \cdot q) \supset (Lp \cdot Lq)$
CP19 (Adj) x RD1:	(4)	$Lp \supset L(q \supset (p \cdot q))$
A6 $[q/p, p \cdot q/q]$:	(5)	$L(q \supset (p \cdot q)) \supset Lq \supset L(p \cdot q))$
(4), (5) x Sil:	(6)	$Lp \supset (Lq \supset L(p \cdot q))$
(6) x Imp:	(7)	$(Lp \cdot Lq) \supset L(p \cdot q)$
(3), (7) x Adj, Def $\equiv$:	(8)	$L(p \cdot q) \equiv (Lp \cdot Lq)$ **Q.E.D.**

T3 expresa una importante propiedad de la necesidad lógica, a saber, que una conjunción es necesaria SI cada término de ella es asimismo necesario. $Lp \cdot Lq$ se dice que es la forma *distribuida* de $L\ (p \cdot q)$ y T3 puede ser denominado *Ley de la distribución-L*. Debe ser comparado con T7, posteriormente.

T4 $L\ (p \equiv q\ ) \equiv (p = q)$

PRUEBA

T3 $[p \supset q/p, q \supset p/q]$:	(1)	$L((p \supset q) \cdot (q \supset p)) \equiv (L(p \supset q) \cdot L\ (q \supset p))$
(1), Def $\equiv$, Def $\supset$, Def $=$:	(2)	$L\ (p \equiv q) \equiv (p = q)$ **Q.E.D.**

T4 muestra que, como indicamos en la pág. 19 otra definición de $(\alpha = \beta)$ podría ser $L\ (\alpha \equiv \beta)$.

Establecemos ahora una nueva regla de transformación derivada:

RD2 $\vdash (\alpha \equiv \beta) \rightarrow \vdash (L\ \alpha \equiv L\ \beta)$

DERIVACION:

Dado:	(1)	$\alpha \equiv \beta$
(1) x N:	(2)	$L\ (\alpha \equiv \beta)$
(2), T4 $(\alpha/p, \beta/q)$ x MP:	(3)	$\alpha = \beta$
(3), T2 $(\alpha/p, \beta/q)$ x MP:	(4)	$L\ \alpha \equiv L\beta$ **Q.E.D.**

Obsérvese que en el paso (3) hemos utilizado T4 en su forma implicacional, a saber, $L\ (p \equiv q) \supset (p = q)$. Evidentemente siempre que podamos probar $(\alpha \equiv \beta)$ podremos probar fácilmente $(\alpha \supset \beta)$.

Podemos demostrar ahora que la Regla de Sustitución de Equivalentes (Eq) es válida en T. Esta regla establece (cf. pág. 13) que si α es una tesis y β se diferencia de α únicamente en tener alguna fbf, δ, en uno o más lugares en los que α tiene una fbf, γ, entonces si $(\gamma \equiv \delta)$ es una tesis, β es una tesis. El modo normal de establecer Eq en PM consiste en demostrar que si $(\gamma \equiv \delta)$ es una tesis, las siguientes son tesis también:

$$\sim\gamma \equiv \sim \delta$$
$$(\gamma \vee \zeta) \equiv (\delta \vee \zeta)$$
$$(\zeta \vee \gamma) \equiv (\zeta \vee \delta)$$

RD2 nos permite añadir a esta lista

$$L\gamma \equiv L\delta$$

De esto se sigue que si α es una fbf cualquiera construida a partir de γ utilizando $\sim$ y L como únicos operadores monádicos y $\vee$ como único operador diádico, y β se construye a partir de δ exactamente del mismo modo que α a partir de γ, entonces si $\vdash (\gamma \equiv \delta)$, $\vdash (\alpha \equiv \beta)$[22]; de donde resulta fácil probar que si $\vdash \alpha$ entonces $\vdash \beta$.

Puesto que todas las fbfs de T pueden escribirse con $\sim$, L y $\vee$ como únicos operadores, podemos aplicar Eq sin restricciones en T; es decir siempre que hayamos probado un teorema de la forma $(\gamma \equiv \delta)$ podemos sustituir γ por δ en cualquier tesis ya probada, α, independientemente del lugar que γ ocupe en α.

T5 $Lp \equiv \sim M \sim p$

PRUEBA

CP3 (DN):	(1)	$p \equiv \sim\sim p$	
(1) $[Lp/p]$:	(2)	$Lp \equiv \sim\sim Lp$	
(2), (1) x Eq:	(3)	$Lp \equiv \sim\sim L \sim\sim p$	
(3), Def M:	(4)	$Lp \equiv \sim M \sim p$	**Q.E.D.**

Corolarios de T5 fácilmente provados (proved) son:

T5a $L \sim p \equiv \sim Mp$

T5b $\sim Lp \equiv M \sim p$

T5 y Eq nos permiten sustituir L por $\sim M \sim$ (o viceversa) en cualquier tesis. También nos permiten formar nuevas tesis de equivalencia tomando cualquier fbf que contenga a L como un argumento de $\equiv$, y la misma fbf pero con $\sim M \sim$ sustituyendo a una o más apariciones de L, como el otro argumento. Para obtener tales tesis simplemente sustituimos la fbf en cuestión por p en $p \equiv p$ y aplicamos T5 a una parte de la equivalencia. T5a y T5b pueden utilizarse de modo semejante.

Otros corolarios de T5 son:

T5c $LLp \equiv \sim MM \sim p$

PRUEBA

T5 $[Lp/p]$:	(1)	$LLp \equiv \sim M \sim Lp$	
(1), T5b x Eq:	(2)	$LLp \equiv \sim MM \sim p$	**Q.E.D.**

y, con pruebas semejantes:

T5d $LL \sim p \equiv \sim MM p$

T5e $MM \sim p \equiv \sim LLp$

T5f $LM \sim p \equiv \sim MLp$

T5g $ML \sim p \equiv \sim LMp$ etc.

A partir de éstos y sus evidentes extensiones obtenemos la siguiente regla: En cualquier secuencia de Ls y Ms adyacentes, L puede ser sustituida por M y M por L en todos los lugares, siempre que o bien se inserte o bien se elimine un $\sim$ tanto inmediatamente antes como inmediatamente después de la secuencia. Denomina-

[22] Esta es, por supuesto, una prueba mediante inducción en la construcción de fbfs de T (*vide* nota 10 a pie de página).

mos a ésta *Regla de Intercambio L–M* ("ILM" para abreviar). Cuando nos convenga daremos el mismo nombre a la aplicación de T5, T5a, T5b o Def *M*, ya que éstos son simplemente casos especiales en los que la secuencia contiene solamente una única *L* ó *M*).

T6 $\sim M(p \vee q) \equiv (\sim Mp \cdot \sim Mq)$

PRUEBA

T3 $[\sim p/p, \sim q/q]$:	(1)	$L(\sim p \cdot \sim q) \equiv (L \sim p \cdot L \sim q)$
(1) x ILM:	(2)	$\sim M \sim (\sim p \cdot \sim q) \equiv (\sim Mp \cdot \sim Mq)$
(2), de M x Eq:	(3)	$\sim M(p \vee q) \equiv (\sim Mp \cdot \sim Mq)$ **Q.E.D.**

T6 significa que si es imposible que o bien *p*-o-*q*, entonces *p* y *q* son ambos imposibles y a la inversa.

T7 $M(p \vee q) \equiv (Mp \vee Mq)$

PRUEBA

CP28:	(1)	$(\sim p \equiv q) \supset (p \equiv \sim q)$
T6 x (1):	(2)	$M(p \vee q) \equiv \sim(\sim Mp \cdot \sim Mq)$
(2), de M x Eq:	(3)	$M(p \vee q) \equiv (Mp \vee Mq)$ **Q.E.D.**

T7 puede ser denominado *Ley de Distribución–M.*

T8 $(p \dashv q) \supset (Mp \supset Mq)$

PRUEBA

A6 $[\sim q/p, \sim p/q]$:	(1)	$L(\sim q \supset \sim p) \supset (L \sim q \supset L \sim p)$
(1), Transp x Eq:	(2)	$L(p \supset q) \supset (\sim L \sim p \supset \sim L \sim q)$
(2), Def $\dashv$, Def *M*:	(3)	$(p \dashv q) \supset (Mp \supset Mq)$ **Q.E.D.**

De acuerdo con RT3 si $\vdash (\alpha \supset \beta)$, entonces $\vdash L(\alpha \supset \beta)$; es decir $\vdash (\alpha \dashv \beta)$. De donde mediante sustitución en T8 y MP, $\vdash (M\alpha \supset M\beta)$. De aquí obtenemos la regla derivada:

RD3 $\vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (M\alpha \supset M\beta)$

T9 $(Lp \vee Lq) \supset L(p \vee q)$

PRUEBA

CP14	(1)	$p \supset (p \vee q)$
(1) x RD1:	(2)	$Lp \supset L(p \vee q)$
A2:	(3)	$q \supset (p \vee q)$
(3) x RD1:	(4)	$Lq \supset L(p \vee q)$
CP27:	(5)	$(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$
(2), (4) x (5):	(6)	$(Lp \vee Lq) \supset L(p \vee q)$ **Q.E.D.**

T10

PRUEBA

T9 [$\sim p/p, \sim q/q$]:	(1)	$(L \sim p \vee L \sim q) \supset L (\sim p \vee \sim q)$
(1) x Transp:	(2)	$\sim L (\sim p \vee \sim q) \supset \sim (L \sim p \vee L \sim q)$
(2) x ILM:	(3)	$M \sim (\sim p \vee \sim q) \supset \sim (\sim Mp \vee \sim Mq)$
(3), de M x Eq:	(4)	$M (p \cdot q) \supset (Mp \cdot Mq)$ **Q.E.D.**

Obsérvese que mientras T3 y T7 son equivalencias, T9 y T10 son solamente implicaciones. Las inversas de T9 y T10 no son teoremas, y de hecho fácilmente puede verse que no son válidas, ya que si sustituimos p por alguna proposición contingente y q por la negación de esa proposición, el consecuente de T9 será verdadero, pero su antecedente será falso ya que ni Lp ni Lq serán verdaderas. Las mismas sustituciones harán que el consecuente de T10 sea verdadero pero su antecedente falso.

Pueden señalarse algunas importantes diferencias entre la implicación material y la implicación estricta mediante la comparación de determinados pares de fórmulas. A veces una fórmula que contenga apariciones de $\supset$ es una tesis, pero cuando se sustituye $\supset$ por $-\!\!\!\supset$ la fórmula deja de ser una tesis. (Desde luego nunca se dará este caso cuando la única aparición de $\supset$ así sustituida sea el operador principal, ya que entonces o bien ambas fórmulas son tesis o no lo es ninguna de las dos). Por ejemplo en cada uno de los siguientes pares la primera fórmula es una tesis pero la segunda no lo es:

(1a) $(p \supset q) \vee (q \supset p)$

(1b) $(p -\!\!\!\supset q) \vee (q -\!\!\!\supset p)$

(2a) $(p \cdot q) \supset (p \supset q)$

(2b) $(p \cdot q) \supset (p -\!\!\!\supset q)$

Más aún, a veces tenemos una equivalencia que es una tesis pero cuando se sustituye $\supset$ por $-\!\!\!\supset$ la fórmula resultante pueda ser probada como implicación solamente. Por ejemplo,

(3a) $((p \supset r) \vee (q \supset r)) \equiv ((p \cdot q) \supset r)$

es una tesis, pero mientras que

(3b) $((p -\!\!\!\supset r) \vee (q -\!\!\!\supset r)) \supset ((p \cdot q) -\!\!\!\supset r)$

es también una tesis, su inversa no lo es[23].

T11 $(\sim p -\!\!\!\supset p) \equiv Lp$

PRUEBA

CP30:	(1)	$(\sim p \supset p) \equiv p$
(1) x RD2:	(2)	$L (\sim p \supset p) \equiv Lp$
(2), Def $-\!\!\!\supset$:	(3)	$(\sim p -\!\!\!\supset p) \equiv Lp$

CP30 (o su forma implicacional, $(\sim p \supset p) \supset p$) se denomina a menudo *Consequentia Mirabilis*. Podemos dar el mismo nombre a T11.

---

[23] Para una discusión más detallada de este tema *vide* Lewis and Langford [1932] capítulo VI.

Al igual que siempre que tenemos $\vdash (\alpha \supset \beta)$ también tenemos $\vdash (\alpha \dashv\!\supset \beta)$, así siempre que tengamos $\vdash (\alpha \equiv \beta)$ también tenemos $\vdash (\alpha = \beta)$. (Esto se prueba fácilmente mediante RT3 y T4). Es decir, T11 y todos los demás teoremas de equivalencias también se pueden probar como equivalencias estrictas.

T12 $(p \dashv\!\supset \sim p) \equiv L \sim p$

La prueba es semejante a la de T11.

T13 $((q \dashv\!\supset p) \cdot (\sim q \dashv\!\supset p)) \equiv Lp$

PRUEBA

CP31:	(1)	$((q \supset p) \cdot (\sim q \supset p)) \equiv p$
(1) x RD2:	(2)	$L((q \supset p) \cdot (\sim q \supset p)) \equiv Lp$
(2), T3 $[q \supset p/p, \sim q \supset p/q]$ x Eq:	(3)	$(L(q \supset p) \cdot L(\sim q \supset p)) \equiv Lp$
(3), Def $\dashv\!\supset$:	(4)	$((q \dashv\!\supset p) \cdot (\sim q \dashv\!\supset p)) \equiv Lp$

T14 $((p \dashv\!\supset q) \cdot (p \dashv\!\supset \sim q)) \equiv L \sim p$ **Q.E.D.**

La prueba como la de T13, pero usando CP32 en vez de CP31.

T11-T14 expresan hechos importantes acerca de las proposiciones no contingentes (es decir proposiciones que son o necesarias o imposibles). T11 dice que una proposición necesaria es la que está implicada estrictamente por su propia negación. T12 dice que una implicación imposible es la que implica necesariamente su propia negación. T13 dice que una proposición necesaria es la que está implicada estrictamente tanto por otra proposición como por la negación de esa otra proposición. T14 dice que una proposición imposible es la que implica estrictamente tanto otra proposición como la negación de esa otra proposición.

T15 $Lp \supset (q \dashv\!\supset p)$

PRUEBA

CP17:	(1)	$p \supset (q \supset p)$
(1) x RD1:	(2)	$Lp \supset L(q \supset p)$
(2), x Def $\dashv\!\supset$:	(3)	$Lp \supset (q \dashv\!\supset p)$ **Q.E.D.**

T16 $L \sim p \supset (p \dashv\!\supset q)$

La prueba como la de T15, pero usando CP18 $(\sim p \supset (p \supset q))$ en vez de CP17.

T15 y T16 se denominan con frecuencia las *paradojas de la implicación estricta,* al igual que CP17 $(p \supset (q \supset p))$ y CP18 $(\sim p \supset (p \supset q))$ se conocen como las *paradojas de la implicación material.* Las denominaciones son poco afortunadas en ambos casos ya que la palabra "paradoja" sugiere que los principios en cuestión son falsos, o cuando menos difíciles de creer, y esto sólo podría imaginarlo alguien que confundiese la implicación estricta o la implicación material con alguna otra relación. Podemos expresar el significado de CP 17 diciendo que si una proposición es verdadera está implicada materialmente por cualquier otra proposición, mientras que CP18 dice que si una proposición es falsa implica materialmente cualquier pro-

posición; y cuando a $\supset$ se le da su interpretación de función de verdad habitual resulta evidente que CP17 y CP18 son verdades simples e indiscutibles. Ahora bien, esto mismo no es válido para las correspondencias de estas tesis para la implicación estricta, a saber, $p \supset (q \dashv\!\!\supset p)$ y $\sim p \supset (p \dashv\!\!\supset q)$, ya que T15 dice no que si una proposición es *verdadera* está implicada estrictamente por cualquier proposición, sino que si una proposición es *necesariamente verdadera* está implicada estrictamente por cualquier proposición; y T16 dice no que si una proposición es *falsa*, sino que si es *imposible*, implica estrictamente cualquier proposición. Que éstas son igualmente verdades indiscutibles puede verse cuando consideramos que, como ya se indicó en la pág. 34, $q \dashv\!\!\supset p$ se interpreta como significando ni más ni menos que es imposible que q-y-no-p. Pero si p es necesaria, no-p es imposible, y por tanto también lo es q-y-no-p; y esto es exactamente lo que dice T15. De modo semejante si p es imposible, también lo es p-y-no-q; y esto es lo que dice T16[24].

T17 $Lp \supset (Mq \supset M(p \cdot q))$

PRUEBA

CP19 (Adj):	(1)	$p \supset (q \supset (p \cdot q))$
(1) x RD1:	(2)	$Lp \supset L(q \supset (p \cdot q))$
T8 $[q/p, p \cdot q/q]$, Def $\dashv\!\!\supset$:	(3)	$L(q \supset (p \cdot q)) \supset (Mq \supset M(p \cdot q))$
(2), (3) x Sil:	(4)	$Lp \supset (Mq \supset M(p \cdot q))$ **Q.E.D.**

RD4 $\vdash \alpha \rightarrow \vdash (M\beta \supset M(\alpha \cdot \beta)$

DERIVACION

Dado:	(1)	α
(1) x N:	(2)	$L\alpha$
T17 $[\alpha/p, \beta/q]$:	(3)	$(L\alpha \supset (M\beta \supset M(\alpha \cdot \beta)))$
(2), (3) x MP:	(4)	$(M\beta \supset M(\alpha \cdot \beta))$

No continuaremos derivando más teoremas o reglas de transformación de T. Las que hemos dado servirán como indicación de lo que contiene el sistema.

Consistencia de T

Demostraremos (prove) que T es consistente con respecto a $\sim$; es decir que si α es una tesis cualquiera de T, $\sim \alpha$ *no* es una tesis de T.

Para toda fbf de T podemos construir lo que denominaremos su *transform-CP*. La transformación de una fbf, α, se forma volviendo a escribir α (si fuera necesario) en notación primitiva y suprimiendo entonces todas las apariciones de L. Evidentemente (i) la transform-CP de cualquier fbf de T será una fbf de CP; (ii) toda fbf de T tendrá una y sólo una transform-CP (aunque dos o más fbfs de T pueden tener la misma transform-CP); y (iii) si la transform-CP de α es α', entonces la transform-CP de $\sim\alpha$ será $\sim\alpha'$.

Demostramos ahora que la transform-CP de toda *tesis* de T es una fbf *válida* de CP.

Esto es evidentemente válido para los axiomas PM, puesto que ellos mismos son fbfs válidas de CP:

Es válido para A5 y A6 ya que sus transforms-CP son respectivamente, $\sim p \vee p$ y $\sim(\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee q)$, que son ambas válidas.

[24] Las paradojas de la implicación estricta se discuten posteriormente en las págs. 274-277.

Todas la tesis de T son o bien axiomas o fbfs obtenidas a partir de uno o más axiomas mediante las reglas de Sustitución, Modus Ponens y Necesariedad (Necessitation).

Sean $\alpha', \beta', \ldots$ respectivamente las transforms-CP de α, β, ...

Si β se obtiene a partir de α mediante sustitución uniforme de γ por alguna variable de α entonces β' puede obtenerse a partir de α' mediante sustitución de γ' por aquella misma variable de α'. Pero la sustitución uniforme preserva la validez en CP; de aquí que si α' es válida, también lo es β'.

Supóngase que β se obtiene mediante Modus Ponens a partir de α y $(\alpha \supset \beta)$. Las transforms-CP de α y $(\alpha \supset \beta)$ son respectivamente α' y $(\alpha \supset \beta)'$. Pero $(\alpha \supset \beta)'$ es la misma fbf que $(\alpha' \supset \beta')$; de aquí que β' pueda ser obtenida a partir de α' y $(\alpha \supset \beta)'$ mediante Modus Ponens en CP. Pero el Modus Ponens también preserva la validez en CP.

Finalmente la transform-CP de α es idéntica a la de $L\alpha$. Por tanto si β se obtiene a partir de α mediante la Necesariedad y α' es válida, también lo es β'.

La transform-CP de todas las tesis de T es por tanto una fbf válida de CP. De aquí se sigue que para toda fbf, α, de T α y $\sim\alpha$ no son a la vez tesis, ya que si lo fuesen α' y $\sim\alpha'$ serían ambas fbfs de CP, lo cual ya sabemos que es imposible.

Por tanto T es consistente con respecto a $\sim$.

Mencionamos unos párrafos atrás que unas cuantas fbfs distintas de T pueden tener la misma transform-CP. De hecho una fbf que no sea tesis de T tiene a veces la misma transform-CP que una que lo es. Esto ocurre, por ejemplo, en el caso de $p \supset Lp$ y $Lp \supset p$; la primera no es tesis (esto lo demostraremos más adelante), mientras que la segunda lo es, pero ambas tienen la transform-CP $\sim p \vee p$. Esto no afecta en modo alguno a la corrección de nuestra prueba de consistencia, sino que proporciona una nueva importante conclusión, a saber que T no es totalmente (strongly) completo, ya que el hecho de que $p \supset Lp$ tenga una transform-CP válida muestra que ésta podría ser añadida a T sin que el sistema resultase por ello inconsistente.

Ejercicios 2

2.1. Demostrar (prove) en T:

(a) $((p \dashv q) \cdot (q \dashv r)) \supset (p \dashv r)$

(b) $((p \dashv q) \cdot M(p \cdot r)) \supset M(q \cdot r)$

(c) $(Lp \cdot Lq) \supset (p = q)$

(d) $M(p \supset q) \equiv (Lp \supset Mq)$

(e) $M \sim p \vee M \sim q \vee M(p \vee q)$

(f) $M(p \supset (q \cdot r)) \supset ((Lp \supset Mq) \cdot (Lp \supset Mr))$

2.2. Una *modalidad afirmativa*[25] es una secuencia que consta de Ls y Ms y un número par de $\sim$ss. Siendo A una modalidad afirmativa, demostrar en T:

$$\vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (A\alpha \supset A\beta)$$

2.3. Si se nos dice que $p \supset Lp$ no es un teorema de T, demostrar que $\vdash M\alpha \rightarrow \vdash \alpha$ no es una regla derivada de T (es decir que no es válida para toda fbf α).

2.4. T′ se obtiene a partir de T mediante la adición de la fórmula $Lp \vee L \sim p$.

[25] Becker [1930]

(a) Demostrar que T′ es consistente.

(b) Si se nos dice que $p \supset Lp$ no es un teorema de T, demostrar que T no contiene a T′.

CAPITULO III

LOS SISTEMAS S4 y S5

Introducción

El sistema T satisface todos los requisitos intuitivos de la lógica modal que enumerábamos en el capítulo anterior, pero es, de cuantos sistemas los satisfacen, el más reducido. Las únicas tesis que contiene son las que cualquiera que haya aceptado estos requisitos y ningunos otros más consideraría indiscutibles; en cambio no figuran entre sus tesis algunas fórmulas más problemáticas, como $Lp \supset LLp$, que ya citamos como ejemplo.

Una de las características de $Lp \supset LLp$, y otras muchas fórmulas, que hace difícil el pronunciarse sobre ellas desde un punto de vista intuitivo, es la de contener secuencias de operadores modales uno inmediatamente tras otro; $Lp \supset LLp$, por ejemplo, contiene la secuencia LL. Tales secuencias se conocen como *modalidades reiteradas* (iterated modalities)[26]. Ahora bien, no todas las fórmulas que contengan modalidades reiteradas presentan dificultades; por ejemplo no hace falta andarse con escrúpulos en admitir la validez de $LLp \supset Lp$ ya que es simplemente el resultado de una sustitución en $Lp \supset p$ (A5). Pero cuando preguntamos, informalmente, si $Lp \supset LLp$ es válida la cuestión que abordamos es ésta: ¿Es necesariamente necesaria cualquier cosa que sea necesaria? Es decir, si p es una verdad necesaria ¿es una verdad necesaria el hecho mismo de que p sea una verdad necesaria? Esta es una cuestión muy debatida y a la vez un tanto oscura, ya que no está del todo claro en qué condiciones podemos decir que una proposición es necesariamente necesaria. Mantener que tal cuestión ha de ser contestada afirmativamente es una posición lícita y plausible; es decir, es plausible sostener que cuandoquiera que una proposición sea verdadera por necesidad lógica no se debe nunca a accidente casual el que lo sea, sino que está lógicamente determinada siempre. Sin embargo no tenemos porqué decidir aquí la cuestión de un modo definitivo: el hecho de que muchas personas estén dispuestas a afirmar la validez de $Lp \supset LLp$ es motivo suficiente para que construyamos un sistema más potente que T, en el cual esta fórmula sea una tesis y para que examinemos en qué consistiría tal sistema.

Ya hemos señalado que $LLp \supset Lp$ es el resultado de una sustitución en A5, y por tanto es ya un teorema de T; de modo que el sistema ampliado ahora deberá tener como tesis $Lp \equiv LLp$. A una equivalencia como ésta, que nos permite sustituir siempre una secuencia de operadores modales por otra más breve, le llamaremos *ley de reducción* de cualquier sistema del que sea tesis. Aceptar esta particular ley de reducción como válida sería un modo de resolver las dificultades que presenta "necesariamente necesaria", ya que entonces podríamos decir que p es necesariamente necesaria precisamente cuando p es necesaria, y no en caso contrario. Una amplia-

---

26 Una explicación más precisa de "modalidad" y "modalidad reiterada" se da en la pág. 51

ción de T tal como la que estamos considerando debera reflejar, entre otras cosas, la decisión de admitir esto así.

De las diversas equivalencias que podrían emplearse como leyes de reducción y que presenten cierta plausibilidad de acuerdo con la interpretación asignada a *L* y *M* las más importantes son las siguientes:

R1 $Mp \equiv LMp$

R2 $Lp \equiv MLp$

R3 $Mp \equiv MMp$

R4 $Lp \equiv LLp$

Ninguna de éstas figura como tesis de T; es más, una importante característica de T es la de no contener ninguna regla de reducción de tipo alguno. Sin embargo, si deseamos hacer una ampliación de T en la que R1–R4 sean tesis no necesitamos llegar a añadírselas como nuevos axiomas, y esto por tres razones:

1. Como ya hemos mencionado, $LLp \supset Lp$ es una tesis de T tal como aparece; y es evidente que sustituyendo en A5 o T1 obtendremos $LMp \supset Mp$, $Lp \supset MLp$ y $Mp \supset MMp$. De tal modo que la mitad de cada equivalencia figura ya en T, y por tanto bastará con añadir las mitades inversas, es decir

R1a $Mp \supset LMp$

R2a $MLp \supset Lp$

R3a $MMp \supset Mp$

R4a $Lp \supset LLp$

2. En segundo lugar, a partir de R4a podríamos derivar R3a y viceversa; y a partir de R1a podríamos derivar R2a, y a la inversa. (Más adelante, en las págs. 50 y 52 presentaremos las derivaciones). Por ello bastará con añadir como axiomas una ley por cada uno de estos pares, por ejemplo R1a y R4a.

3. En tercer lugar R4a es derivable de R1a, aunque R1a no sea derivable de R4a. (Más adelante veremos también esta derivación). De modo que podríamos obtener las cuatro leyes de reducción añadiendo simplemente R1a a T; mientras que añadiendo solamente R4a podríamos obtener dos de las leyes de reducción (R3 y R4) pero no las otras dos.

Todo esto sugiere la construcción de dos sistemas axiomáticos, ambos más potentes que T y uno de ellos más potente que el otro. El primero de ellos, obtenido añadiendo $Lp \supset LLp$ (R4a) como nuevo axioma de T, se conoce como el *Sistema S4*. El segundo, obtenido añadiendo $Mp \supset LMp$ (R1a) a T, se conoce como el *Sistema S5*.[27]

S4 y S5 ofrecen además otro motivo de interés. Algunos filósofos han mantenido no solamente que todas las proposiciones necesarias son necesariamente necesarias, sino que si una proposición posee cualquier característica modal (necesidad, posibilidad, imposibilidad, contingencia) posee esa característica por necesidad; otros, sin embargo, han puesto en duda o han negado esto. Las leyes de reducción R1–R4, junto con algunas deducciones simples a partir de ellas, pueden ser consi-

---

27 Los nombres "S4" y "S5" se derivan de Lewis and Langford [1932] (pág. 501) en donde sistemas deductivamente equivalentes a éstos son el cuarto y el quinto en una serie de sistemas modales. Para una explicación de estos sistemas tal como aparecen en Lewis and Longford *vide infra*, Capítulo 12. Sobociński [1953] ha demostrado que S4 y S5 son equivalentes respectivamente a los sistemas M' y M'' de Von Wright [1951]. (Cf. *infra*, págs. 113-115).

deradas como expresión de aquella doctrina. Por la sola construcción de S4 y S5 no vamos a capacitarnos para decidir la cuestión disputada; mas, sin embargo, estos sistemas nos proporcionarán un método para investigar las consecuencias de tal doctrina. Más aún, el hecho de que S4 y S5 sean sistemas distintos nos muestra algo que no resulta ciertamente evidente a primera vista, es decir, que la doctrina mencionada puede tomar una fórmula más general o una más limitada; ya que podría muy bien mantenerse que todas las proposiciones necesarias son necesariamente necesarias (como en S4) sin mantener que todas las proposiciones posibles son necesariamente posibles (como en S5).

En los teoremas que siguen añadiremos al número del teorema uno de los símbolos "(T)", "(S4)", "(S5)", que indicará, respectivamente, que el teorema pertenece a T, que pertenece a S4 pero no a T, y que pertenece a S5 pero no a S4. Toda tesis de T es, por supuesto, también tesis de S4, y toda tesis de S4 es tesis de S5.

El sistema S4

La base de S4 es la misma de T más:

A7 $Lp \supset LLp$

T18 (*S4*) $MMp \supset Mp$

PRUEBA

A7 [$\sim p/p$]	(1)	$L \sim p \supset LL \sim p$	
(1) x ILM:	(2)	$\sim Mp \supset \sim MMp$	
(2) x Transp:	(3)	$MMp \supset Mp$	**Q.E.D.**

T19 (S4) $Lp \equiv LLp$ [R4]

PRUEBA

A5 [Lp/p]:	(1)	$LLp \supset Lp$	
A7, (1) x Adj, Def $\equiv$:	(2)	$Lp \equiv LLp$	**Q.E.D.**

T20 (S4) $Mp \equiv MMp$ [R3]

La prueba a partir de T1 [Mp/p] y T18

T21 (S4) $MLMp \supset Mp$

PRUEBA

A5 [Mp/p]:	(1)	$LMp \supset Mp$	
(1) x RD3:	(2)	$MLMp \supset MMp$	
(2), T18 x Sil:	(3)	$MLMp \supset Mp$	**Q.E.D.**

T22 (S4) $LMp \supset LMLMp$

PRUEBA

T1 [LMp/p]:	(1)	$LMp \supset MLMp$	
(1) x RD1:	(2)	$LLMp \supset LMLMp$	

(2), T19 x Eq: (3) $LMp \supset LMLMp$ **Q.E.D.**

T23 (S4) $LMp \equiv LMLMp$

PRUEBA

T21 x RD1: (1) $LMLMp \supset LMp$

T22, (1) x Adj, Def $\equiv$: (2) $LMp \equiv LMLMp$ **Q.E.D.**

T24 (S4) $MLp \equiv MLMLp$

PRUEBA

T23 $[\sim p/p]$: (1) $LM \sim p \equiv LMLM \sim p$

(1) x ILM : (2) $\sim MLp \equiv \sim MLMLp$

CP29 : (3) $(p \equiv q) \equiv (\sim p \equiv \sim q)$

(2), (3) x Eq: (4) $MLp \equiv MLMLp$ **Q.E.D.**

Las Modalidades en S4

Definimos una *modalidad* como una secuencia ininterrumpida de cero o más operadores monádicos $(\sim, L, M)$[28]. Expresamos el caso cero escribiendo "–". Ejemplos de modalidades son: –; $\sim$; L; $M \sim$; LL; $\sim ML \sim M$. Es evidente, sin embargo, que en cualquier sistema que contenga ILM todas las modalidades podrán ser expresadas ya bien sin ningún signo de negación en absoluto o ya bien con uno sólo, y en este caso con la negación al principio; diremos que una modalidad expresada de esta forma está en *forma standard*, y de ahora en adelante daremos por supuesto que todas las modalidades están expresadas en forma standard. Se dice que una modalidad es una modalidad *reiterada* SI contiene dos o más operadores modales; así pues LL y $\sim MLM$ son modalidades reiteradas, pero $\sim$ y $\sim L$ no lo son.

Decimos que dos modalidades, A y B, son *equivalentes* en un sistema determinado SI el resultado de sustituir A por B (o B por A) en cualquier fórmula es siempre equivalente en aquel sistema a la fórmula original (en caso contrario decimos que son *no equivalentes*, o *distintas*, en aquel sistema). En un sistema que contenga las reglas de la Sustitución Uniforme y de la Sustitución de Equivalentes esto es así SI $(Ap \equiv Bp)$ es una tesis de aquel sistema (siendo Ap y Bp las fórmulas obtenidas usando A y B respectivamente como prefijos de p). Si A y B son equivalentes en un determinado sistema y A contiene menos operadores modales que B, entonces se dice que B es *reducible* a A en aquel sistema. Evidentemente aquellas fórmulas que hemos denominado *leyes de reducción* expresan la reductibilidad de determinadas modalidades a otras en sistemas de los que son tesis.

Podemos ahora probar una importante conclusión acerca de S4, a saber, que todas las modalidades son equivalentes a una de las siguientes, o a su negación:

(i) – ; (ii) L ; (iii) M ; (iv) LM ; (v) ML ; (vi) LML ; (vii) MLM

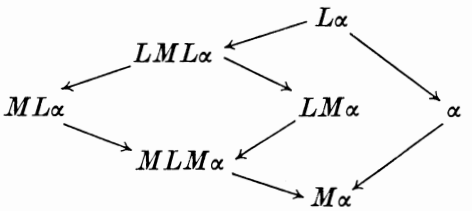
La prueba es inmediata. Vemos claramente que (ii) y (iii) son las únicas modalidades con un solo operador (no tenemos en cuenta, de momento, los casos negativos). Ahora bien T19 y T20 nos permiten sustituir LL por L y MM por M; de aquí que si añadimos un operador modal a (ii) o a (iii) obtendremos o bien una modalidad equivalente a la original o en caso contrario (iv) o (v), que son, por tanto, las

[28] Cf. Feys [1950]

únicas modalidades irreductibles de dos operadores. Exactamente igual, si añadimos un operador modal a (iv) o a (v) las únicas modalidades irreductibles de tres operadores que podemos obtener son (vi) y (vii). Sin embargo, si añadimos un operador modal a (vi) o a (vii) el resultado será siempre equivalente o bien a la modalidad original, igual que anteriormente, o en caso contrario equivalente a (iv) o a (v) de acuerdo con T23 o T24; de aquí que no pueda darse ninguna modalidad irreductible con cuatro o más operadores.

Evidentemente los casos negativos pueden resolverse del mismo modo; así pues lo que hemos demostrado, en resumen, es que en S4 hay a lo sumo catorce modalidades distintas. Estas catorce modalidades son en realidad distintas entre sí, aunque de momento no podamos demostrarlo.

Si a una fbf ponemos como prefijo una modalidad, el propio resultado es por supuesto una fbf. Las relaciones de implicación que se establecen (en S4) entre las fórmulas así obtenidas a partir de (i)–(vii) están indicadas en el siguiente diagrama[29]. (Por razones tipográficas representamos la implicación por una flecha).



Podemos obtener un diagrama análogo para los casos negativos, negando todas las fórmulas y volviendo al revés la dirección de todas las flechas.

La situación es llamativamente distinta en T. La ausencia de leyes de reducción en aquel sistema da como resultado que, por muchos operadores modales que una modalidad determinada pueda contener, podemos construir siempre otra mayor que no será equivalente a aquélla. Por lo tanto T contiene un número infinito de modalidades distintas[30]

El sistema S5

La base de S5 es la misma que la de T, más:

A8 $Mp \supset LMp$

Los tres primeros teoremas de S5 se prueban igual que T18-T20, pero usando A8 en vez de A7.

T25 (S5) $MLp \supset Lp$

T26 (S5) $Mp \equiv LMp$

T27 (S5) $Lp \equiv MLp$

---

[29] Para este diagrama *vide* Prior [1957], pág. 124. Los resultados fueron obtenidos originalmente por Becker [1930] y Parry [1939]

[30] La prueba más sencilla de que existen infinitas modalidades distintas en T se realiza mostrando que, cuando L_n es una secuencia ininterrumpida de n Ls $(L_n\, p \supset L_{n+1} p)$ no es nunca una tesis de T siendo $m \geqslant 1$. *Vida infra*, pág. 65.

$Lp \supset LLp$, el axioma característico de S4, no es un axioma de S5, pero ahora lo probamos como teorema de S5. Puesto que los dos sistemas tienen el resto de sus bases en común, esto constituye una prueba de que S5 contiene a S4.

A7 (S4) $Lp \supset LLp$

PRUEBA EN S5

T1 $[Lp/p]$:	(1)	$Lp \supset MLp$.
(1) T26 $[Lp/p]$ x Eq:	(2)	$Lp \supset LMLp$
(2) T27 x Eq:	(3)	$Lp \supset LLp$ **Q.E.D.**

Las Modalidades en S5

Hemos demostrado ahora que las cuatro leyes de reducción mencionadas anteriormente son todas ellas teoremas de S5. Las repetimos ahí por conveniencia:

R1 $Mp \equiv LMp$ [T26]

R2 $Lp \equiv MLp$ [T27]

R3 $Mp \equiv MMp$ [T20]

R4 $Lp \equiv LLp$ [T19]

Una manera sencilla de resumir estas leyes es la siguiente: en cualquier par de operadores modales monádicos adyacentes podemos suprimir el primero. Puesto que este proceso puede repetirse indefinidamente podemos formular esta regla más general: *en cualquier secuencia de operadores modales monádicos podemos suprimir todos menos el último*[31].

Consecuencia inmediata de esto es que S5 contenga como máximo seis modalidades distintas, a saber:

(i) – ; (ii) L ; (iii) M

y sus negaciones. En realidad estas seis modalidades son todas distintas entre sí.

Funciones modales y grado modal

Cualquier fbf que contenga un operador modal se dice que es una *función modal* de sus variables (exactamente igual que cualquier fbf del CP es una función de verdad de sus variables). Si una fbf, α, contiene uno o más operadores modales, pero ninguno de éstos se encuentra dentro del ámbito de ningún otro operador modal, se dice entonces que α es una fórmula modal de primer grado (o una función modal de primer grado de sus variables). En general, una fórmula de grado n es aquella en la que al menos un operador modal tiene un argumento de grado n - 1, pero ningún operador modal tiene un argumento de grado superior a n - 1 [32]

---

31 La diferencia entre S4 y S5 en la cuestión de las modalidades reiteradas puede hacerse ver diciendo que en S4 todo lo que estamos autorizados a hacer es (a) considerar cada serie ininterrumpida de Ls_0Ms *como una sola* L o M y luego (b) si la secuencia tiene más de tres operadores de largo suprimir todos menos los dos o tres últimos, según su número sea par o impar.

32 Es conveniente considerar a las fbfs que no contienen ningún operador modal como fórmulas modales de grado 0 al igual que hemos considerado a – y ~como modalidades. Una definición precisa del *grado modal de una fórmula* puede darse como sigue (se presupone que las fórmulas están escritas en notación primitiva):

1. Una variable proposicional es de grado 0.

La noción de función modal de grado n es más amplia que la de una fórmula que contenga una modalidad con n operadores modales, y no debe ser confundida con ella. Ciertamente LLp y $MLp \supset Mq$ son fórmulas de segundo grado, y lo son debido a la presencia en ellas de las modalidades LL y ML; sin embargo $M(p \supset Lq)$ también es una fórmula de segundo grado, aunque no contiene modalidades reiteradas en absoluto. Cualquier fórmula que contenga una modalidad con n operadores modales será por lo menos de grado n; sin embargo una fórmula puede ser de grado n (por muy grande que sea n) sin que contenga ninguna modalidad con n operadores modales, o ni siquiera ninguna modalidad reiterada en absoluto.

Si se prueba que una fórmula de grado n es equivalente en un sistema determinado a alguna fórmula de grado inferior a n, decimos que es *reductible* (en aquel sistema) a aquella fórmula. Ya hemos visto que en S5 cualquier fórmula que sea de grado superior al primero solamente a causa de la presencia en ella de modalidades reiteradas puede ser reducida a una fórmula de primer grado mediante las leyes de reducción. Sin embargo es también posible demostrar esta conclusión mucho más general:

Teorema de reducción de S5

Toda fórmula de grado superior al primero es reducible en S5 a una fórmula de primer grado.

Como requisito preliminar a la demostración de este teorema derivamos unas cuantas tesis más. (En las pruebas de estas tesis nos referiremos a las leyes de reducción con los símbolos R1–R4 en vez de con los números de los teoremas a que corresponden, puesto que probablemente son más fáciles de recordar de este modo).

T28 (T) $L(p \vee q) \supset (Lp \vee Mq)$

PRUEBA

A6 $[\sim q/p, p/q]$:	(1) $L(\sim q \supset p) \supset (L \sim q \supset Lp)$	
(1), Def $\supset$, x DN:	(2) $L(q \vee p) \supset (\sim L \sim q \vee Lp)$	
(3), x ILM, x Conm:	(3) $L(p \vee q) \supset (Lp \vee Mq)$	**Q.E.D.**

T29 (S5) $L(p \vee Lq) \equiv (Lp \vee Lq)$

PRUEBA

T28 $[Lq/q]$, R2 x Eq:	(1) $L(p \vee Lq) \supset (Lp \vee Lq)$	
T9 $[Lq/q]$:	(2) $(Lp \vee LLq) \supset L(p \vee Lq)$	
(2), R4 x Eq:	(3) $(Lp \vee Lq) \supset L(p \vee Lq)$	
(1), (3) x Adj, Def $\equiv$:	(4) $L(p \vee Lq) \equiv (Lp \vee Lq)$	**Q.E.D.**

T30 (S5) $L(p \vee Mq) \equiv (Lp \vee Mq)$

PRUEBA

T29 $[Mq/q]$:	(1) $L(p \vee LMq) \equiv (Lp \vee LMq)$	
(1), R1 x Eq:	(2) $L(p \vee Mq) \equiv (Lp \vee Mq)$	**Q.E.D.**

2. Si α es de grado n, entonces $\sim\alpha$ es de grado n.
3. Si α es de grado n y β es de grado m, entonces si $n \geqslant m$, $(\alpha \vee \beta)$ es de grado n; de lo contrario es de grado m.
4. Si α es de grado n entonces $L\alpha$ es de grado $n + 1$.

Esta definición está dada en Parry [1939] pág. 144.

T31 (S5) $M(p \cdot Mq) \equiv (Mp \cdot Mq)$

PRUEBA

T29 [$\sim p/p$, $\sim q/q$]:	(1)	$L(\sim p \vee L \sim q) \equiv (L \sim p \vee L \sim q)$
(1) x CP29:	(2)	$\sim L(\sim p \vee L \sim q) \equiv \sim (L \sim p \vee L \sim q)$
(2) x ILM:	(3)	$M \sim (\sim p \vee \sim Mq) \equiv \sim (\sim Mp \vee \sim Mq)$
(3), Def.:	(4)	$M(p \cdot Mq) \equiv (Mp \cdot Mq)$ **Q.E.D.**

T32 (S5) $M(p \cdot Lq) \equiv (Mp \cdot Lq)$

PRUEBA

T31 [Lq/q]:	(1)	$M(p \cdot MLq) \equiv (Mp \cdot MLq)$
(1), R2 x Eq:	(2)	$M(p \cdot Lq) \equiv (Mp \cdot Lq)$ **Q.E.D.**

Ahora podemos probar el teorema de reducción en S5 describiendo un procedimiento efectivo para reducir cualquier fórmula de grado superior al primero a una fórmula de primer grado, mediante transformaciones basadas en equivalencias. Las únicas equivalencias requeridas, (aparte de las equivalencias del CP) son las que nos proporcionan ILM, las leyes de distribución-*L* y distribución-*M* (T3 y T7), las leyes de reducción R1-R4, y T29-T32. Por supuesto todas ellas se encuentran en S5.

La ley de distribución-*L* ($L(p \cdot q) \equiv (Lp \cdot Lq)$ nos autoriza a distribuir *L* por toda una conjunción de cualquier tipo que sea. Si algún término de la conjunción (conjunct) empieza ya con un operador modal la ley de reducción apropiada nos permitirá suprimir la *L* cuando coincida con este operador. Así $L(p \cdot Mq)$ se convertirá no simplemente en $(Lp \cdot LMq)$ de acuerdo con distribución-*L*, sino en $(Lp \cdot Mq)$ de acuerdo con R1. En un caso como éste diremos que la *L* ha sido *absorbida* por la *M*. T29 y T30 nos autorizan a practicar el mismo tipo de distribución y absorción cuando *L* precede a una disyunción, *siempre que* al menos uno de los disyuntos (disjuncts) originales empiece por un operador modal[33] La ley de distribución-*M* ($M(p \vee q) \equiv (Mp \vee Mq)$) y T31 y T32 nos permiten practicar de modo semejante la distribución y absorción de *M* sin restricciones por toda una disyunción cualquiera, y, siempre que se cumplan las condiciones anteriores, por toda una conjunción. Estas operaciones son pasos claves en el proceso de reducir fórmulas a primer grado.

Bastará que mostremos cómo puede reducirse a primer grado cualquier fórmula de segundo grado, ya que la repetición del procedimiento nos permitirá tratar cualquier fórmula de grado superior.

El procedimiento consta de cuatro pasos, aunque, por supuesto, no todos son necesarios en todos los casos. Los tres primeros son inmediatos y ya conocidos a estas alturas.

1. Primero eliminamos todos los operadores excepto $\sim$, *L*, *M*, $\vee$ y $\cdot$ usando las definiciones apropiadas.

2. Luego eliminamos toda aparición (occurrence) de $\sim$ inmediatamente anterior a un paréntesis o a un operador modal mediante las leyes de De Morgan y ILM (Por tanto $\sim$ figurará sólo como prefijo de variables).

---

[33] T29 y T30 se establecen para disyunciones de dos miembros sólo. Si deseamos practicar distribución-*L* en una disyunción de *n* miembros debemos reunir juntos todos los miembros no modalizados de la disyunción y tratarlos como un solo disyunto (disjunct). Por ejemplo si tenemos $L(p \vee Mq \vee r)$, formamos $L((p \vee r) \vee Mq)$ y luego lo distribuimos para conseguir $L(p \vee r) \vee Mq$. *No* llegamos a $Lp \vee Mq \vee Lr$.

3. Seguidamente reducimos todas las modalidades reiteradas a operadores modales singulares mediante las leyes de reducción.

4. Si la fórmula que obtenemos como resultado de los pasos 1-3 sigue siendo de segundo grado entonces esto sólo puede deberse a que sea toda ella, o parte de ella, de la forma $L\,\alpha$ o $M\,\alpha$, en la que α es de primer grado y consiste ya bien en una conjunción o ya bien en una disyunción.

Consideramos ahora el caso de $L\,\alpha$. Existen tres posibilidades: (a) α es una conjunción; en ese caso distribuimos L por todos los términos de la conjunción (conjuncts), dejando que sea absorbida por cualquier operador modal con el que coincida en el proceso. (b) α es una disyunción de cuyos disyuntos uno al menos empieza por un operador modal, en ese caso también distribuimos L y dejamos que sea absorbida. (c) α es una disyunción de cuyos disyuntos ninguno empieza por un operador modal. Puesto que α es de primer grado el que lo sea sólo podrá deberse a que algún disyunto en α sea una conjunción con un operador modal en su interior. Para resolver este caso transformamos α en una conjunción mediante la ley distributiva del CP, $(p \vee (q \cdot r) \equiv ((p \vee q) \cdot (p \vee r)$ y distribuimos L por toda la conjunción así obtenida. (Recuérdese que L se distribuye sin restricción alguna por toda la conjunción). De este modo si $L\alpha$ es $L\,(p \vee (q \cdot Mr))$ transformamos esto mediante Distrib en:

$$L((p \vee q) \cdot (p \vee Mr))$$

y luego mediante distribución-L en:

$$L\,(p \vee q) \cdot L\,(p \vee Mr)$$

Luego podemos o bien (como en este caso) proceder como en (b), para obtener

$$L\,(p \vee q) \cdot (Lp \vee Mr)$$

o, si esto no fuera posible, aplicar Distrib y distribución-L una vez más. Repitiendo estas operaciones acabaremos consiguiendo siempre que L coincida con todos los operadores modales, por muy ocultos que estén en α, y pueda ser absorbida por ellos.

El caso de $M\alpha$ puede ser resuelto de modo análogo, con la salvedad de que ahora será cuando α sea una conjunción de cuyos términos (conjuncts) ninguno empiece por un operador modal cuando no podamos proceder directamente, y que la ley distributiva del CP que ahora precisaremos será:

$$(p \cdot (q \vee r)) \equiv ((p \cdot q) \vee (p \cdot r)$$

(A fin de dejar todo esto más claro daremos un ejemplo o dos de reducción a primer grado en las págs. 58-59).

Toda fbf, por tanto, es equivalente en S5 a alguna función modal de primer grado de sus variables[34]. Ahora bien no es difícil comprender que sólo puede haber un número finito de funciones modales de primer grado distintas, de cualquier conjunto finito de variables, ya que toda fórmula de primer grado (escrita en notación primitiva) es una función de verdad de (i) variables proposicionales y de (ii) fbfs que consten de L seguida de una función de verdad de variables proposicionales y existe sólo un número finito de funciones de verdad no equivalentes de cualquier número finito de fórmulas. De aquí que el teorema de reducción de S5 muestre que en S5 existe solamente un número finito de funciones modales no equivalentes de cualquier número finito de variables.

---

[34] Esto es verdadero incluso de una fbf que no contenga ningún operador modal; ya que cualquier fbf, α, es equivalente a α. $(Lp \vee \sim Lp)$, siendo p alguna variable de α

(Es digno de tenerse en cuenta que para demostrar que existe solamente un número finito de funciones modales de *primer grado* de un número finito de variables no hacemos uso de ningún principio que pertenezca específicamente a S5; este resultado es válido igualmente con respecto a T y S4. Más aún,podemos generalizarlo fácilmente para demostrar que existe solamente un número finito de funciones modales distintas (de un número finito de variables) de cualquier determinado grado finito. Por tanto si tuviéramos un sistema en el que, aunque no pudiéramos reducir todas las fbfs (como en S5) a fórmulas de primer grado, mas sin embargo pudiéramos reducirlas a algún grado finito específico (por ejemplo el cuarto grado) esto bastaría para demostrar que en aquel sistema existía únicamente un número finito de funciones modales distintas (de cualquier número finito de variables).

Forma normal conjuntiva modal

Como explicábamos en la pág. 26, decimos que una fbf está en forma normal conjuntiva (FNC) SI es una conjuncion (posiblemente degenerada) de disyunciones (también posiblemente degeneradas), de las cuales cada disyunto (disjunct) es de una forma específica determinada. Diremos que una fbf está en *forma normal conjuntiva modal* (FNCM) SI está en FNC y cada disyunto es *o bien* (a) una fbf del CP, *o* (b) una fbf del CP precedida por una sola L o M[35]. Así pues, las siguientes fbfs están en FNCM:

$$(p \vee Lp) \cdot q$$

$$[M((p \vee q) \supset r) \vee Lp \vee (r \cdot s)] \cdot [M(p \vee q) \vee Lr]$$

pero las siguientes no lo están:

$$(M(p \vee q) \cdot r) \vee s$$

$$L(M(p \vee q) \vee r) \cdot (Lp \vee Mq)$$

Teorema de la FNCM

Cualquiera fbf puede ser reducida en S5 a FNCM

Es decir, existe un procedimiento efectivo mediante el cual podemos encontrar para cualquier fbf, α, una fbf α', tal que α' esté en FNCM y $(\alpha \equiv \alpha')$ sea una tesis de S5.

PRUEBA

(*i*) Si α es una fbf del CP entonces ya está en FNCM.

(ii) Si α es una fórmula de primer grado, eliminamos primero todos los operadores modales excepto L y M mediante las definiciones apropiadas. La fórmula resultante será una función de verdad de fbfs cada una de las cuales o bien es una fbf del CP o es una fbf de la forma $L\beta$ o $M\beta$, siendo β una fbf del CP. Tomando cada una de tales fbf como una unidad indivisible reducimos la fórmula completa a FNC de acuerdo con los métodos del CP. Finalmente sustituimos todas las $\sim L$ por $M \sim$ y todas las $\sim M$ por $L \sim$. La fórmula resultante, α', está en FNCM.

(iii) Si α es de grado superior al primer grado comenzamos reduciéndola a primer

35 El nombre "forma normal conjuntiva modal" es nuestro, pero la idea se deriva de Carnap [1946]. Carnap denomina a la fórmula en FNCM a la que puede reducirse una fbf, α, el *reductum-MP* de α. En Wajsberg [1933], pág. 122 se describe una forma normal ligeramente más complicada, en la que cada disyunto consta de L o $\sim L$ seguido por una disyunción de variables (negadas o sin negar).

grado de acuerdo con el método explicado en la sección anterior, y luego obtenemos α' procediendo igual que en (ii). (En realidad el único paso adicional requerido en este caso será la aplicación de la ley distributiva del CP).

Puesto que las únicas transformaciones que tienen lugar en esta reducción pueden realizarse mediante equivalencias que ya figuran en S5, $(\alpha \equiv \alpha')$ es una tesis de S5 en todos los casos.

Damos aquí algunos ejemplos de reducción a FNCM. Servirán para ilustrar la reducción a primer grado.

EJEMPLO 1

$$(MMp \dashv p) \supset (p \dashv Lp)$$

Primero reducimos a primer grado como sigue:

Paso 1: $L(MMp \supset p) \supset L(p \supset Lp)$
$\sim L(\sim MMp \vee p) \vee L(\sim p \vee Lp)$

Paso 2: $M \sim(\sim MMp \vee p) \vee L(\sim p \vee Lp)$
$M(MMp \cdot \sim p) \vee L(\sim p \vee Lp)$

Paso 3: $M(Mp \cdot \sim p) \vee L(\sim p \vee Lp)$

Paso 4: $(Mp \cdot M \sim p) \vee (L \sim p \vee Lp)$

Tenemos ahora una fórmula de primer grado. Para convertirla en FNCM aplicamos Distrib y obtenemos

$$(Mp \vee L \sim p \vee Lp) \cdot (M \sim p \vee L \sim p \vee Lp)$$

EJEMPLO 2

$$(p \dashv (q \cdot Mr)) \dashv \sim M(p \cdot \sim q \cdot \sim Mr)$$

Aquí también comenzamos reduciéndola a primer grado

Paso 1: $L(L(p \supset (q \cdot Mr)) \supset \sim M(p \cdot \sim q \cdot \sim Mr))$
$L(\sim L(\sim p \vee (q \cdot Mr)) \vee \sim M(p \cdot \sim q \cdot \sim Mr))$

Paso 2: $L(M \sim(\sim p \vee (q \cdot Mr)) \vee L \sim(p \cdot \sim q \cdot \sim Mr))$
$L(M(p \cdot \sim(q \cdot Mr)) \vee L(\sim p \vee q \vee Mr))$
$L(M(p \cdot (\sim q \vee \sim Mr)) \vee L(\sim p \vee q \vee Mr))$
$L(M(p \cdot (\sim q \vee L \sim r)) \vee L(\sim p \vee q \vee Mr))$

Paso 4: $M(p \cdot (\sim q \vee L \sim r)) \vee L(\sim p \vee q \vee Mr)$
$M((p \cdot \sim q) \vee (p \cdot L \sim r)) \vee L((\sim p \vee q) \vee Mr)$
$M(p \cdot \sim q) \vee M(p \cdot L \sim r) \vee L(\sim p \vee q) \vee Mr$
$M(p \cdot \sim q) \vee (Mp \cdot L \sim r) \vee L(\sim p \vee q) \vee Mr$

Esta es una fórmula de primer grado. Distrib nos proporciona la siguiente fórmula en FNCM:

$(Mp \vee M(p \cdot \sim q) \vee L(\sim p \vee q) \vee Mr) \cdot (L \sim r \vee M(p \cdot \sim q) \vee L(\sim p \vee q) \vee Mr)$

Las funciones modales en S4

Evidentemente cualquier sistema que, al igual que T, contenga un número infinito de modalidades distintas contiene también un número infinito de funciones modales distintas, incluso de una sola variable. En S5, como hemos visto, existe solamente un número finito de modalidades y también solamente un número finito de funciones modales distintas de cualquier número finito de variables. Esto podría llevarnos a dar por hecho que puesto que S4 coincide con S5 en tener un número finito de modalidades también coincidirá con S5 en tener un número finito de funciones modales. Sin embargo esto último no es cierto: en S4, al igual que en T, existe un número infinito de funciones modales distintas incluso de una sola variable[36].

Ya hemos señalado (pág. 57) que en cualquiera de los sistemas que hemos considerado existe únicamente un número finito de distintas funciones modales (de un número finito de variables) *de cualquier grado determinado*. Por tanto el hecho de que en S4 exista un número infinito de funciones modales de incluso una variable muestra que en S4 no es posible ninguna reducción universalmente aplicable de fbfs a grado alguno específico (y *a fortiori* no es posible ninguna reducción a una forma normal de algún grado específico, correspondiente a la reducción a FNCM en S5).

El sistema Brouweriano

Especial interés presenta el siguiente par de teoremas:

T33 (S5) $p \supset LMp$

PRUEBA
T1, A8 x Sil.

T34 (S5) $MLp \supset p$

PRUEBA
T33 $[\sim p/p]$:
(1) x ILM:
(2) x Transp:

(1) $\sim p \supset LM \sim p$
(2) $\sim p \supset \sim MLp$
(3) $MLp \supset p$ **Q.E.D.**

Ninguno de ellos figura en S4. En realidad si hubiéramos de añadir uno de ellos como axioma extra de S4 obtendríamos un sistema por lo menos tan potente (strong) como S5 (en realidad obtendríamos exactamente S5). En el caso de T33 sólo necesitamos sustituir *Mp* por *p* y aplicar luego R3 para obtener el axioma A8 de S5, y en el caso de T34 la cuestión no es mucho más complicada. Sin embargo, si hubiéramos de añadir T33 (o T34) a T en vez de a S4 no obtendríamos S5 sino un sistema mucho más limitado que S5 y que ni contendría a S4 ni estaría contenido en él. Este sistema ha sido denominado el *sistema Brouweriano* y T33 el

[36] Makinson [1966a] pág. 406 cita esto como un resultado "bien conocido" acerca de S4, aunque no hemos podido encontrarlo en la literatura. Sin embargo, en realidad, se sigue fácilmente de su propia prueba del mismo resultado para un sistema que él denomina D* y que contiene a S4.

axioma Brouweriano[37]. Nosotros a veces les denominaremos a ambos simplemente "B".

La siguiente es una regla de transformación derivada perteneciente al sistema Brouweriano (y por supuesto también a S5).

RD5 $\vdash (M\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (\alpha \supset L\beta)$

DERIVACION

Dado:	(1)	$M\alpha \supset \beta$
(1) x RD1:	(2)	$LM\alpha \supset L\beta$
T33 $[\alpha/p]$:	(3)	$\alpha \supset LM\alpha$
(3), (2) x Sil:	(4)	$\alpha \supset L\beta$ **Q.E.D.**

Otro modo de obtener S5 sería añadir RD5 a S4, como regla de transformación primitiva, sin añadir ningún nuevo axioma; pues entonces, como $MMp \supset Mp$ (T18) es una tesis de S4, RD5 nos proporcionará inmediatamente $Mp \supset LMp$ (es decir A8).

Añadiremos algo más sobre el sistema Brouweriano más adelante (págs. 72 y ss. y 213 y ss.).

Consistencia

Que los sistemas S4, S5 y B son todos consistentes con respecto a $\sim$ puede demostrarse simplemente añadiendo a la prueba de consistencia de T (págs. 45 y ss.) la indicación de que los transform-CP de A7, A8 y T33 son válidos. (En cada uno de los casos el transform-CP es simplemente $\sim p \vee p$). Estos sistemas no están definitivamente (strongly) completos, por la misma razón que dimos en el caso de T.

Degeneración en CP

Ofrece cierto interés ver qué clase de sistema obtendríamos si hubiéramos de añadir, incluso a T, y a fortiori a S4 y S5, el axioma extra $p \supset Lp$. Por supuesto esta fórmula es intuitivamente no válida, pero, como vimos en la pág. 46 el añadirla no hace al sistema inconsistente.

En un sistema tal, el nuevo axioma, junto con A5, produciría inmediatamente $\vdash (Lp \equiv p)$ y luego por simple deducción $\vdash (Mp \equiv p)$. Mediante las reglas de Sustitución Uniforme y Sustitución de Equivalentes obtendríamos luego el resultado de que todas las fórmulas serían equivalentes a su transform-CP; así pues en cualquier fórmula podríamos suprimir o añadir *L*s o *M*s a nuestro antojo (siempre

---

[37] Esta fórmula se deriva de Becker [1930], pág. 509. Algunos autores han denominado a T33 el *axioma Brouwersche*, y al sistema el sistema *Brouwersche*, quizá porque en Lewis and Langford [1932], pág. 497, la frase de Becker "Brouwersche Axiom" se cita sin traducir. El nombre se deriva de L.E.J. Brouwer, el fundador de la escuela intuicionista de matemáticas. En el cálculo proposicional intuicionista (*vide* pág. 250) la ley de la doble negación no es válida como equivalencia. Más exactamente, $p \supset \sim\sim p$ es válida pero $\sim\sim p \supset p$ no lo es. Un modo de que esto resulte razonable ha sido suponer que en este cálculo $\sim$ significa algo como "no es posible que", es decir, que significa lo que nosotros significamos mediante $L\sim$ (*vide* pág. 250). Ahora bien, si sustituimos $\sim$ por $L\sim$ entonces la ley de la doble negación no parece desde luego generalmente válida. Para $\sim\sim p \supset p$ se convierte en $L\sim L\sim p \supset p$, es decir $LMp \supset p$. Si esto se añade a S5 podemos derivar fácilmente (de acuerdo con R1) la a todas luces no válida $Mp \supset p$, y, así pues, cualquier argumento a favor de S5 debe considerarse contra esta fórmula. La inversa, sin embargo (a saber $p \supset \sim\sim p$, la fórmula que *es* válida en el cálculo intuicionista) se convierte en $p \supset LMp$, es decir T33 que *está* en S5. De este modo aunque la relación con Brouwer es un tanto débil la tradición histórica ha continuado asociando su nombre a esta fórmula.

que mantuviéramos su buena formación) y el resultado sería equivalente a la fórmula original. En un sistema así, por tanto, los operadores modales simplemente "holgazanearían"; al interpretar este sistema no pondríamos ninguna distinción importante entre necesidad, posibilidad, y verdad; y para todos los fines prácticos se consideraría al sistema como si fuese sencillamente el propio Cálculo Proposicional, con *L*s y *M*s incrustadas como meros adornos tipográficos. De un sistema como éste, en el que todas las fbfs son equivalentes a sus transforms-CP, se dice a veces que *degenera en* CP (is... said to *collapse into*...).

Obsérvese que estos resultados los obtenemos a partir del nuevo axioma y de A5 solamente (junto con la parte de CP correspondiente a la base de T); no precisamos como axioma A6, ya que su transform-CP es una tesis, ni tampoco necesitamos la regla de Necesariedad (rule of Necessitation), que explicamos en la pág.38. Más aún el sistema evidentemente contendría incluso S5, ya que el transform-CP de A8 es una tesis. Más adelante demostraremos (pág. 69) que ninguno de los sistemas que hemos considerado degenera (collapses) en CP.

Ejercicios 3

3.1. Demostrar en S4:

(a) $(Lp \vee Lq) \equiv L\,(Lp \vee Lq)$

(b) $((p = q) \dashv r) \supset ((p = q) \dashv Lr$

3.2. Siendo A una modalidad afirmativa (*vide* Ejercicio 2.2) demostrar que $(p \dashv q) \supset (Ap \dashv Aq)$ es un teorema de S4.

3.3. Demostrar que la adición a T de la fórmula $(p = q) \supset (Lp = Lq)$, como axioma, produce un sistema deductivamente equivalente a S4.

3.4. Demostrar en S5:

(a) $(Lp \dashv Lq) \vee (Lq \dashv Lp)$

(b) $(Mp \dashv q) \vee (p \dashv Lq)$

3.5. Reducir las siguientes fórmulas a Forma Normal Conjuntiva Modal (FNCM):

(a) $L\,(p \vee (q \cdot (r \vee Ls)))$

(b) $M\,(p \cdot q) \supset [(Lp \dashv Lq) \dashv Mq]$

(c) $[p \dashv (q \supset (p \dashv q))] \supset [\sim(p \dashv q) \supset (p \dashv \sim q)]$

(d) $L\,(\sim p \cdot \sim q) \supset [(L\,(p \vee q) \dashv r) \cdot (r \supset (p \dashv p))]$

(e) $(p \dashv q) \supset [M\,(p \cdot \sim Lp) \dashv M(q \cdot (p \dashv Lp))]$

CAPITULO IV

LA VALIDEZ EN T, S4 Y S5

Ya hemos aludido al problema de definir la validez para las fórmulas modales. Hasta ahora hemos utilizado unos cuantos criterios intuitivos que desde luego han sido suficientes para decidir la validez o no validez de cierto número de fórmulas; pero nos ha faltado algo que corresponda a la descripción que dábamos para las fórmulas del CP cuando decíamos (págs. 22-23) que una fbf α es válida en CP SI $V(\alpha)=1$ para todas las asignaciones CP, V, con respecto a las variables en α. Más avanzado el capítulo daremos unas cuantas definiciones de la validez de las fórmulas modales del mismo estilo que la descripción citada; para hacerlas, sin embargo, más fácilmente comprensibles describiremos primero una serie de juegos de salón que tendrán como resultado reflejar exactamente su estructura. Por supuesto que la validez de las fórmulas modales puede ser definida directamente en términos de estos mismos juegos de salón.

El juego CP

Para empezar vamos a tratar de inventar un juego sencillo basado en la definición de la validez en CP que acabamos de mencionar. La forma del juego podría ser la siguiente: Damos al jugador una hoja de papel en la que hemos escrito previamente cierto número de letras del alfabeto ordinario (con preferencia las de la serie p, q, r... etc.). Llamaremos al jugador y a su hoja una *jugada* del juego CP, o más brevemente una *jugada*-CP. Las jugadas-CP se diferenciarán únicamente en la lista de letras que figuren en la hoja de papel.

Después le nombramos al jugador fbfs del CP, a las cuales ha de responder levantando la mano o dejándola abajo. Pero antes de nombrar una fbf hemos de ir preparando adecuadamente al jugador, en el sentido de que antes de nombrar una fbf α hemos de nombrarle previamente todas las fórmulas que aparecen como partes de α, comenzando por las variables. Por ejemplo si se trata de nombrar $(\sim p \vee p)$ debemos nombrar primero p y luego $\sim p$ y sólo entonces podemos nombrar $(\sim p \vee p)$. Las instrucciones que ha de seguir el jugador son las siguientes (para mayor simplicidad consideraremos al principio sólo fórmulas en notación primitiva).

1. Si se nombra una sola letra (variable) levante Vd. la mano si la letra figura en el papel; manténgala abajo si no figura.
2. Si se nombra $\sim \alpha$ (siendo α una fbf) levante Vd. la mano si la tuvo abajo cuando se nombró α; manténgala abajo si la levantó cuando se nombró α. (Recuérdese que si hemos preparado al jugador adecuadamente para $\sim \alpha$, α debe haber sido nombrada ya).
3. Si se nombra $(\alpha \vee \beta)$, levante Vd. la mano si ya la levantó para α o para β; manténgala abajo si la mantuvo abajo tanto para α como para β.

(Usando las definiciones de $\supset$, $\cdot$ y $\equiv$ podemos derivar fácilmente reglas para responder a fórmulas que contengan estos operadores. O también podemos transformar todas las fórmulas, antes de empezar, en fórmulas con notación primitiva).

No es difícil ver que en cualquier jugada-CP las reglas permiten al jugador responder sin ambigüedades a cualquier fórmula CP, siempre que se presente adecuadamente. Si en una jugada-CP el jugador levanta la mano cuando se nombra una fbf α, decimos que α es ganadora (successful) en aquella jugada. Muchas fórmulas serán ganadoras en algunas jugadas pero no en otras (dependiendo por supuesto de las letras que aparezcan en la hoja de papel para una jugada determinada). Pero habrá, algunas fórmulas que serán ganadoras en todas las jugadas-CP (por ejemplo $p \vee \sim p$). A éstas las denominaremos *ganadoras-CP*.

Para hacer más explícito lo que ya debe estar resultando evidente paralelismo denominemos a una jugada V y escribamos V (α) = 1 para indicar "el jugador de la jugada V levanta la mano cuando se nombra α" y V (α) = 0 para indicar "el jugador de la jugada V sigue con la mano abajo cuando se nombra α". Las reglas 1, 2 y 3 para responder a las fórmulas así traducidas se convierten en las condiciones 1, 2 y 3 de la pág. 22 bajo las cuales V es una asignación-CP. Una fórmula resultará ganadora en una jugada-CP V SI es cumplida por la asignación correspondiente. Y una fórmula será ganadora-CP SI es cumplida por todas las asignaciones-CP. Es decir, las fórmulas ganadoras-CP son precisamente aquéllas que son válidas-CP.

Puesto que para cualquier fbf que contenga n variables sólo es preciso tener en cuenta las hojas que contengan una selección de aquellas n variables (que pueden ser todas ellas o ninguna de ellas), ya que, evidentemente, las respuestas a variables que no aparezcan en α no pueden afectar a la respuesta a α, podemos, por tanto, determinar todas las jugadas-CP cuya diferencia sea relevante, en 2^n hojas. Así pues, podríamos comprobar si α es válida preparando un tipo de hojas como éste citado y efectuando tantas jugadas como hojas (nombrando α por partes según el orden indicado). Cada hoja junto con las respuestas a α y a todas sus partes bien-formadas, corresponde exactamente a una línea de la tabla de verdad para α.

El juego T

El juego que denominaremos, por anticipado, *juego T* requiere una persona que nombre las fórmulas y un número cualquiera de jugadores de uno en adelante. Cada jugador está provisto de una hoja de papel con letras, como en el juego CP. Los contenidos de estas hojas pueden presentar múltiples diferencias. Los jugadores están sentados de tal modo que se determine con precisión a qué jugadores puede ver cada uno, si es que puede ver a alguno, en el curso del juego (para este propósito podrían utilizarse pantallas o cualquier otro instrumento). El campo de visión de cada jugador puede limitarse como se quiera, ya bien haciendo que ningún jugador pueda ver a los demás, o ya bien haciendo que todos puedan ver a todos. La visión no tiene por qué ser mutua; es decir porque dispongamos que el jugador A pueda ver al jugador B no hemos de disponer necesariamente que B pueda ver a A, podemos disponer que lo haga y podemos disponer que no lo haga.

Una jugada del juego T consistirá, por tanto, en un conjunto de jugadores, cada uno con su hoja y en posición de ver, o de no ver, a ciertos jugadores. En el juego T puede nombrarse cualquier fbf de T, siempre que, al igual que en el juego CP, se nombren primero sus partes bien-formadas, comenzando por las variables. (Aquí también podemos dar por supuesto que las fbf estén escritas en notación primitiva, eliminando M, -3 y $=$, si bien estableceremos la regla para M explícitamente.

Las instrucciones que han de seguir los jugadores son las que numerábamos 1, 2 y 3 en el juego CP, más las dos siguientes para las veces en que nombremos L y M:

4. Si se nombra $L\,\alpha$ (siendo α una fbf de T) levante Vd. la mano si *todos los jugadores que Vd. pueda ver* (incluido Vd. mismo)[38] levantaron la mano cuando fue nombrada α; de lo contrario continúe con la mano abajo.

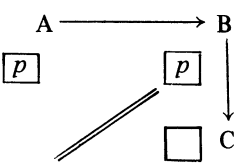
5. Si se nombra $M\,\alpha$, levante Vd. la mano si *por lo menos uno de los jugadores que Vd. pueda ver* (Vd. mismo u otro cualquiera) levantó la mano cuando fue nombrada α; de lo contrario continúe con la mano abajo.

La diferencia entre cuando nombramos L y M y cuando nombramos funciones de verdad es que en el caso de L y M el jugador tiene que saber no solamente lo que *él* ha hecho anteriormente sino también lo que han hecho anteriormente los jugadores que él puede ver. Al igual que en el juego CP debe quedar claro que en cada jugada-T cada fbf de T (si es que ha sido presentada según el orden debido) recibirá (por parte de cada jugador) una única respuesta. Cuando nombremos una fórmula en una determinada jugada-T haremos, por supuesto, que algùnos jugadores levanten la mano y otros no. Si hacemos que todos los jugadores sin excepción levanten la mano decimos que es una fórmula *ganadora* en aquella jugada-T. Es evidente que una fórmula podría ser ganadora en una jugada-T pero no ser ganadora en otra. Hay algunas fórmulas, sin embargo, que resultarían ganadoras cualquiera que fuera la jugada-T; es decir, sin importar cuántos jugadores haya, cuántas letras tengan en sus hojas, o qué campo de visión hayamos asignado a cada jugador. Decimos que tales fórmulas son *ganadoras-T*.

Definimos ahora una fórmula válida-T como aquélla que resultaría ganadora-T.

Un ejemplo sencillo de fórmula ganadora-T es $Lp \supset p$ (en notación primitiva $\sim Lp \vee p$). Ya que, consideremos cualquier jugador A: Teniendo en cuenta el orden podemos nombrar primero a p; si p aparece en la hoja de A, A levantará la mano al oír p, y por tanto también la levantará al oír $\sim Lp \vee p$ (de acuerdo con la regla 3). Si en su hoja no aparece p no levantará la mano cuando nombremos a p, y por tanto tampoco la levantará al oír Lp (de acuerdo con la regla 4); en tal caso debe levantarla al oír $\sim Lp$ (de acuerdo con la regla 2) y por tanto también al oír $\sim Lp \vee p$ (de acuerdo con la regla 3). Por tanto A debe levantar la mano al oír $\sim Lp \vee p$, figure o no figure p en su hoja; y todos los demás jugadores de cualquier otra jugada-T deben obrar igualmente, por la misma razón.

Por el contrario consideremos $Lp \supset LLp$. En algunas jugadas-T resultará ganadora, pero en otras no. En la jugada siguiente no lo resultaría. Contamos con tres jugadores, A, B y C. Las hojas de A y B contienen p pero la de C no la contiene. A puede ver a B, B puede ver a C, pero A no puede ver a C (los restantes detalles son irrelevantes). Podemos representar esta situación mediante el siguiente diagrama:



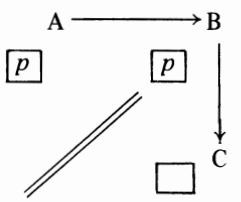
Las flechas representan la relación visual (seeing-relation), la doble línea el tabique que limita la visualidad, y los cuadrados las hojas de los jugadores (el de C está vacío). El juego se desarrollaría de esta forma:

[38] En otras palabras, suponemos que cada jugador puede verse a sí mismo.

1.ª expresión nombrada: p • A y B levantan la mano; C no la levanta.
2.ª expresión nombrada: Lp • A levanta la mano (ya que todos los jugadores que él puede ver, es decir él mismo y B, levantaron la mano al oír p); pero B y C no la levantan.
3.ª expresión nombrada: LLp. Nadie levanta la mano (ni siquiera A, ya que B, al que puede ver, no levantó la mano al oír Lp).
4.ª expresión nombrada: $Lp \supset LLp$. B y C levantan la mano, pero A no la levanta (ya que él levantó la mano al oír Lp pero no al oír LLp).

Podemos representar estas respuestas en nuestro diagrama haciendo una lista de todas las partes bien-formadas de $Lp \supset LLp$, al lado de cada jugador, y escribiendo a continuación de cada una de ellas "=1" si aquel jugador levanta la mano cuando la parte en cuestión es nombrada y "=0" si no la levanta. Lo que obtenemos es esto:

$p = 1$
$Lp = 1$
$LLp = 0$
$(Lp \supset LLp) = 0$



$p = 1$
$Lp = 0$
$LLp = 0$
$(Lp \supset LLp) = 1$

$p = 0$
$Lp = 0$
$LLp = 0$
$(Lp \supset LLp) = 1$

$Lp \supset LLp$ no es ganadora-T, ya que existe al menos un jugador (es decir A) en al menos una jugada-T (es decir, la que acabamos de describir) que no levanta la mano al oírla. Por tanto $Lp \supset LLp$ no es válida-T.

En realidad podemos demostrar una conclusión más general que ésta. Siempre que L represente una secuencia de n Ls consecutivas, podemos demostrar que $L_n p \supset L_{n+m} p$ no es nunca ganadora-T siendo $m \geqslant 1$ ($Lp \supset LLp$ es por supuesto precisamente el caso especial en que $n=1$ y $m=1$). Sean $n+m+1$ jugadores, colocados sucesivamente, de tal modo que cada uno de ellos vea al siguiente jugador pero no a los demás (y el último no vea a nadie más que a sí mismo. Hágase que p aparezca en la hoja de todos los jugadores menos en la del último. Entonces generalizando el método utilizado para $Lp \supset LLp$ demostraremos que el primer jugador levantará la mano al oír $L_n p$ pero no al oír $L_{n+m} p$.

De acuerdo con nuestra definición de validez-T, por tanto, $Lp \supset p$ es válida-T, pero ninguna fbf de la forma $L_n p \supset L_{n+m} p$ (siendo $m \geqslant 1$) es válida-T.

El juego S4

El *juego S4* es exactamente igual al juego T, excepto en el siguiente aspecto. Ahora no podemos disponer libremente el campo de visión de los jugadores, sino que contamos con la restricción de que la relación visual ha de ser transitiva, es decir en el caso de que de tres jugadores cualesquiera, A,B y C,A pueda ver a B y B pueda ver a C,entonces A debe ser capaz de ver a C (obsérvese que cualquier jugada con menos de tres jugadores cumple automáticamente esta condición). A cualquier jugada en la que la disposición del campo de visión cumpla este requisito la deno-

minamos jugada-S5 (de este modo toda jugada S-4 es también una jugada-T, pero no toda jugada-T es una jugada-S4). Una expresión que resulte ganadora en todas las jugadas-S4 es una expresión *ganadora-S4*. Evidentemente toda expresión ganadora-T es también ganadora-S4; pero una expresión que ganase en todas las jugadas-S-4 podría perder en alguna jugada-T y no ser así ganadora-T.

Definimos una fórmula *válida-S4* como aquella que al ser nombrada resultase ganadora-S4.

Ahora bien, la jugada-T que utilizamos para demostrar que $Lp \supset LLp$ no es ganadora-T no es una jugada-S4, ya que en ella A podía ver a B y B podía ver a C pero A no podía ver a C. De modo que si tuviésemos que intentar demostrar que $Lp \supset LLp$ no es una expresión ganadora-S4, no podríamos utilizar aquella jugada para este propósito. De hecho esta expresión es ganadora-S4, como podemos comprobar del siguiente modo: Preguntamos: ¿en qué circunstancias podría un jugador, A, levantar la mano al oír *Lp* pero no levantarla al oír *LLp*? Solamente podría hacerlo si todas las personas que él ve levantasen la mano al oír *p* pero algunos la dejasen abajo al oír *Lp*. Sin embargo, estas personas a su vez sólo pueden dejar la mano abajo si alguno de los jugadores que *ellas* puedan ver dejan la mano abajo cuando se nombra *p*. Esto es imposible, sin embargo, en jugada S4 alguna, ya que en tales jugadas A puede ver también a todos los jugadores que estas personas pueden ver; y todos los que A puede ver levantaron la mano al oír *p*.

Por otra parte la expresión $Mp \supset LMp$ no es ganadora-S4. Una jugada-S4 muy sencilla lo demostrará. Sean sólo dos jugadores, A y B, de los cuales A puede ver a B pero B no puede ver a A. La hoja de A contiene *p* pero la de B no la contiene. Al oírse *p* se alza la mano de A pero no la de B. Al oírse *Mp* la mano de A se alza nuevamente, pero no así la de B, ya que el único jugador que éste puede ver es a sí mismo y él no levantó la mano al oírse *p*. Por tanto al oírse *LMp* no se alza la mano de A, ya que B, al que puede ver, no levantó la mano cuando fue nombrada *Mp*. Por tanto A levanta la mano para *Mp* pero la deja abajo al oír *LMp*; por tanto no la levanta al oír $Mp \supset LMp$.

El juego S5

El juego S5 se diferencia del juego T o del juego S4 en este aspecto solamente: en que en una jugada-S5 todos los jugadores deben ser capaces de ver a todos los demás jugadores[39]. Evidentemente todas las jugadas-S5 son así mismo jugadas-S4 (y por tanto jugadas-T), pero algunas jugadas-S4 no son jugadas-S5. Una expresión que resulte ganadora en todas las jugadas-S5 es una expresión *ganadora-S5*. Evidentemente todas las expresiones ganadoras-S4 son a su vez ganadoras-S5,

[39] Ofrece algún interés el observar que a fin de obtener un juego S5 (es decir un juego en el que serán ganadores S5 exactamente los mismos nombramientos que los del juego descrito en el texto) no es necesario insistir en que cada jugador deba ver a todos los demás jugadores. Es suficiente añadir al juego S4 el nuevo requisito de que la relación de visualidad sea simétrica o recíproca, en el sentido de que siempre que cualquier jugador, A, pueda ver a otro jugador, B, B debe poder ver a A también. Esto permitirá una cierta libertad en las disposiciones de visualidad; pero la única manera de que todos los jugadores no tengan que verse entre sí es dividirlos en dos o más grupos de tal modo que cada jugador pueda ver a todos los demás jugadores dentro de su grupo, pero ningún jugador pueda ver a ningún jugador de cualquier otro grupo.

Para ver que esta versión del juego hace ganadores-S5 a los mismos nombramientos sólo tenemos que pensar que si un conjunto de jugadores se divide en grupos de este modo, entonces cada uno de estos grupos podría considerarse como una jugada del juego S5 tal como se describe en el texto. Así pues, lo que obtuviésemos podría igualmente bien considerarse como un número de jugadas simultáneas del juego S5 original. Un nombramiento ganador-S5 tiene que ser ganador en todas las jugadas y evidentemente no importa el que estas jugadas se dispongan al mismo tiempo o en distintos tiempos.

pero una expresión ganadora-S5 a veces pierde en algunas jugadas-S4 y por tanto no es ganadora-S4.

Definimos una fórmula *válida-S5* como aquella que forma una expresión ganadora-S5.

La última expresión que discutimos ($Mp \supset LMp$), aunque no es ganadora-S4 es ganadora-S5. Consideremos un jugador cualquiera, A. Demostramos que, en cualquier jugada-S5, el él levanta la mano cuando oye Mp también la levanta al oír LMp. Si levanta la mano cuando oye Mp esto significa que alguien que él puede ver levantó la mano al oírse p. Pero, puesto que en todas las jugadas-S5 todos los jugadores pueden ver a todos los demás, si A vio a alguien levantar la mano al oírse p también lo vieron todos los demás. Por tanto no sólo A sino todos los demás jugadores también levantan la mano al oírse Mp; y por tanto A levanta la mano al oírse LMp.

Como muestra de expresión no ganadora-S5 (y, por tanto, desde luego, tampoco ganadora-S4) tomamos $p \supset Lp$. Supongamos que hay sólo dos jugadores, A y B, en una jugada-S5, y que p figura en la hoja de A pero no en la de B. Entonces A levantará la mano al oír p pero no la levantará al oírse Lp, ya que B, a quien él puede ver, no levanta la suya al oír p.

Algunas conclusiones

Contamos ahora con tres distintas, aunque semejantes, definiciones de validez para fórmulas modales. Más avanzado este capítulo indicaremos cómo expresar estas definiciones de un modo puramente formal sin los arriesgados artificios de hojas de papel, alzamiento de manos y demás. Hasta entonces seguiremos hablando en términos de juegos de salón, y demostrando algunas conclusiones importantes.

TEOREMA 1

Toda tesis de T es válida-T

Demostramos esto haciendo ver que todos los axiomas de T son válidos-T y que las reglas de transformación preservan la validez-T.

Los axiomas PM no presentan dificultad. Puesto que son fórmulas del CP cada jugador actúa a partir de su propia hoja solamente, jugando simplemente al juego CP. Y puesto que todas ellas son fórmulas CP *válidas*, el resultado será que todos los jugadores levantarán la mano, por las razones que dimos anteriormente.

Ya hemos demostrado que A5 es válida-T en nuestras explicaciones del juego T.

En cuanto a A6 ($L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$ procederemos como sigue: Si esta expresión no es ganadora-T, entonces en alguna jugada-T algún jugador, pongamos por caso A, no deberá levantar la mano. Ahora bien sólo puede hacer esto si levanta la mano para $L(p \supset q)$ y Lp pero no para Lq. Pero si él levanta la mano al oírse $L(p \supset q)$ entonces todas las personas que él puede ver levantaron la mano al oírse $p \supset q$; es decir, todas las personas que él puede ver que hayan levantado la mano al oír p la levantaron también al oír q • A, sin embargo, levanta asimismo la mano al oír Lp y por tanto todas las personas que él puede ver levantaron la mano al oírse q. De ahí que si A levanta la mano al oírse $L(p \supset q)$ y al oírse Lp, deba también levantarla al oírse Lq. Por A6 es válida-T.

La regla de la Sustitución Uniforme es preservadora de la validez-T. En términos del juego T lo que aquí tenemos que demostrar es lo siguiente: que si α es una expresión ganadora-T cualquiera y sustituimos uniformemente cualquier letra (pongamos por caso p) en α por cualquier fbf de T, el resultado es otra expresión ganadora-T. Ahora bien si una expresión, α, es ganadora-T ello significa que se alzan las manos de todos los jugadores al oírse α en todas las jugadas-T, ya fueran o no

fueran alzadas al oírse p; por tanto continuarán siendo alzadas al oírse α, sean o no sean alzadas al oírse la fórmula que sustituya a p.

El Modus Ponens es preservador de la validez-T. Cualquier jugador en cualquier jugada-T que levante la mano al oírse α deberá dejarla abajo al oírse $\sim\alpha$. Por tanto si también levanta la mano al oírse $(\sim\alpha \vee \beta)$ debe levantarla al oírse β. Pero $(\alpha \supset \beta)$ se define como $(\sim\alpha \vee \beta)$. Por tanto si se levantaron todas las manos en todas las jugadas-T tanto al oírse α como al oírse $(\alpha \supset \beta)$, deberán levantarse todas las manos al oírse β.

La regla de la Necesariedad (rule of Necessitation) también es preservadora de la validez-T. En todas las jugadas-T, si *todas* las manos se levantan al oírse α entonces todos los jugadores se encuentran con que todos los jugadores vistos por ellos levantan la mano al oírse α. Por tanto se levantan todas las manos al oírse $L\alpha$.

Hemos demostrado por tanto que todas las tesis de T son válidas-T.

TEOREMA 2

Todas las tesis de S4 son válidas-S4

PRUEBA

El fundamento de S4 es el mismo que el de T pero con el axioma adicional A7 ($Lp \supset LLp$). Puesto que todas las expresiones que son ganadoras-T son ganadoras-S4, toda fbf que sea válida-T será válida-S4. Demostramos en nuestra exposición del juego S4 que la expresión $Lp \supset LLp$ es ganadora-S4, es decir, que A7 es válida-S4. Nuestras demostraciones de que las reglas de transformación son preservares de la validez-T no implican aspecto alguno que distinga el juego T del juego S4 o del juego S5, y por tanto demuestran igualmente que preservan la validez-S4 (y la validez-S5 también por el mismo motivo). Por tanto todas las tesis de S4 son válidas-S4.

TEOREMA 3

Todas las tesis de S5 son válidas-S5

Puesto que demostramos en la exposición del juego S5 que el axioma característico de S5 $Mp \supset LMp$, es válido-S5, este teorema puede ser demostrado del mismo modo que el Teorema 2, con algunos cambios, evidentemente, pero de escasa importancia.

(Demostraremos en un estadio más avanzado que todas las fórmulas válidas-T son tesis de T, todas las fórmulas válidas-S4 tesis de S4 y todas las fórmulas válidas-S5 tesis de S5. Habremos demostrado entonces que las tres definiciones de validez están exactamente de acuerdo con los sistemas axiomáticos relevantes).

Podemos demostrar ahora también algunas aserciones hechas sin demostración en el capítulo 3.

TEOREMA 4

T, S4 y S5 son sistemas distintos.

PRUEBA

Demostramos en la exposición del juego T que A7 ($Lp \supset LLp$) no es válida-T. Por tanto, de acuerdo con el Teorema 1, A7 no es una tesis de T. Es, sin embargo, una tesis de S4. Por tanto T no contiene a S4. De modo semejante, puesto que A8 no es válida-S4 (y por consiguiente no es válida-T) ni S4 ni T contienen a S5.

TEOREMA 5

Existe un número infinito de modalidades distintas en T[40]

PRUEBA

Demostramos en la pág. 65 que si L_n es una secuencia ininterrumpida de n Ls, entonces para cualquier $m \geqslant 1$, $L_n p \supset L_{n+m} p$ no es válida-T. De ello se sigue, de acuerdo con el Teorema 1, que no es tesis de T; y por consiguiente tampoco lo es $L_n p \equiv L_{n+m} p$ –es decir, L_n y L_{n+m} son modalidades distintas en T. Evidentemente existen infinitas modalidades que constan, cada una de ellas, únicamente de Ls, y lo que acabamos de demostrar es que ninguna de ellas es equivalente a otra en T.

También podemos demostrar que la totalidad de las catorce modalidades reseñadas en la pág. 51 son distintas en S4. Dicho brevemente, para cada par de estas modalidades A y B, podemos encontrar una jugada-S4 en la cual $(Ap \equiv Bp)$ no es ganador. De aquí se sigue que $(Ap \equiv Bp)$ no es válido-S4 y por tanto, de acuerdo con el Teorema 2, no es tesis de S4; así A y B serán distintas en S4. De modo semejante podemos demostrar que las seis modalidades reseñadas en la pág. 53 son distintas en S5. Dejamos al lector el desarrollo detallado de esta demostración.

TEOREMA 6

S5 no degenera en CP (does not collapse...) (*vide* pág. 61)

PRUEBA

Como mostramos en la pág. 67, $p \supset Lp$ no es válida-S5; por tanto, de acuerdo con el Teorema 3, no es una tesis de S5. Su transform-CP, sin embargo, es decir $\sim p \vee p$, es una tesis de CP y por tanto de S5. De aquí que alguna fbf no sea equivalente en S5 a su transform-CP.

Puesto que S5 contiene tanto a S4 como a T, estos sistemas tampoco degeneran (collapse) en CP.

Definiciones formales de la validez

Cumpliremos ahora lo que antes prometimos respecto a expresar nuevamente las definiciones de la validez-T, la validez-S4 y la validez-S5, de un modo puramente formal.

Una jugada del juego T consta de tres elementos: (i) un grupo de jugadores; (ii) disposición del campo de visión; (iii) un conjunto de instrucciones para responder cuando se nombren fbfs. (No consideramos las hojas con letras como un elemento aparte, sino que las incluimos en el apartado (iii), puesto que su función es simplemente indicar a cada jugador individual cómo ha de responder cuando se nombre una sola letra). Nuestras definiciones formales de la validez-T expresarán la estructura de estos elementos y sus mutuas relaciones.

En vez de decir que tenemos un conjunto de jugadores diremos simplemente que tenemos un conjunto, MU, de objetos de un tipo determinado. (Estos objetos se denominan símbolos $mu_1, \ldots, mu_i, \ldots$ para designar a los miembros de MU. Las características de la relación de visualidad (Seeing-relation) relevantes para el juego T son las siguientes: (a) se trata de una relación *diádica* (es decir, una relación que precisa de dos términos); (b) para cada jugada-T *se define para todos los jugadores* (es decir para cada par de jugadores A y B, se especifica si A puede o no puede ver a B);

40 Esta conclusión fue demostrada por primera vez por Sobociński [1953] adaptando un método de McKinsey [1940]

(c) se trata de una relación *reflexiva* (es decir todos los jugadores, sin excepción, pueden verse a sí mismos). Por lo demás no imponemos restricción alguna respecto a la naturaleza de la relación. Podemos, por tanto, representarla formalmente simplemente mediante una relación diádica, reflexiva, R, definida para todos los miembros de MU. Finalmente, nuestra descripción del juego CP y su relación con asignaciones de valor CP pondrá en claro que las instrucciones para responder, al ser nombradas fbfs, tienen la estructura de una asignación de valor a fbfs, aunque de un tipo más complejo del que tenemos en CP. Al igual que en el caso del juego CP, levantar la mano al oír una fbf indica la asignación del valor 1 a esa fbf, y el dejarla abajo indica la asignación del valor 0. Sin embargo en el juego T contamos no solamente con un único jugador sino con un grupo de jugadores; y así, al nombrarse una determinada expresión tenemos no solamente el alzamiento o no alzamiento de una mano sino todo un muestrario de alzamientos de manos (algunos jugadores levantarán la mano, otros la dejarán abajo). Por tanto para describir la respuesta a una expresión que sea nombrada y hacerlo adecuadamente tenemos que decir cosas tales como: "El jugador A levanta la mano, el jugador B no la levanta, ..." y todo esto en la misma jugada del juego T. Si hemos de representar entonces tal situación mediante una asignación de valor no podemos simplemente declarar que $V(\alpha)$ es 1 o es 0 sin más indicaciones, sino que hemos de especificar que es 1 o es 0 con *respecto a un miembro de Mu* (ya que son los miembros de MU lo que corresponde a los jugadores). Es decir, siendo mu_i miembro de MU tenemos $V(\alpha) = 1$ (ó 0) con respecto a (o "en") mu_i, y lo escribimos como $V(\alpha, mu_i) = 1$ o $V(\alpha, mu_i) = 0$.

Tenemos ahora que dar reglas para evaluar una fórmula cualquiera que sea. La asignación V debe en primer lugar (como en el caso de CP) dar un valor para cada una de las variables de la fórmula, pero ahora, en este caso, debe darle un valor en cada biembro de MU por separado; es decir, si $Lp \supset p$ ha de ser valorado en tres mundos (pongamos por caso) mu_1, mu_2, y mu_3, debemos exigir que V asigne a p un valor (1 ó 0) en mu_1, en mu_2 y en mu_3. (Que corresponderá a la presencia o ausencia de p en la hoja de cada jugador). Para fórmulas complejas, al igual que la respuesta de un jugador determinado a $\sim\alpha$, $\alpha \vee \beta$, $L\alpha$ o $M\alpha$ depende de las respuestas de los jugadores a α y a β, así la asignación para $\sim\alpha, \alpha \vee \beta, L\alpha$ o $M\alpha$ en un miembro determinado de MU depende de las asignaciones para α y β en los miembros de MU. Para $\sim$ y $\vee$ las reglas son simplemente [V$\sim$] y [V$\vee$] generalizadas para todos los miembros de MU, y para L, siendo mu_i un miembro cualquiera de MU hacemos que $V(L\alpha, mu_i)$ sea 1 SI se le ha asignado 1 a α en todos los mu_j tales que $mu_i R mu_j$.

Decimos que un conjunto de objetos, MU, una relación R, y una asignación de valor, V, juntos constituyen, cuando satisfacen las condiciones que acabamos de explicar, un modelo-T[41]. Debe quedar claro que un modelo-T expresa exactamente la estructura de una jugada del juego T. Nuestra definición anterior de validez-T como el triunfo (successfulness) en todas las jugadas-T puede ahora definirse nuevamente diciendo que una fbf, α, es válida-T SI en todos los modelos-T, $V(\alpha, mu_i) = 1$ para todo mu_i en MU.

Podemos establecer todo esto del modo siguiente[42]:

---

41 Podríamos hablar de modo análogo de una asignación de valor CP como de un *modelo-CP*; pero parece que sólo vale la pena distinguir entre una asignación de valor y un modelo cuando (como en el caso de T) la asignación de valor no es el único elemento del modelo. Formalmente una asignación de valor V en un modelo-T es simplemente una función diádica cuyo primer argumento es una fbf de T, cuyo segundo argumento es un miembro de MU, y cuyo valor es 1 ó 0.

42 La explicación que damos aquí sigue esencialmente la de Kripke [1963a] (Para la

Definimos un modelo-T como un triple ordenado $<$MU, R, V$>$ siendo MU un conjunto de objetos (mundos), siendo R una relación diádica reflexiva definida para todos los miembros de MU, y siendo V una asignación de valor que satisfaga las siguientes condiciones:

1. Para cualquier variable proposicional, p_j, y para cualquier mu_i que sea miembro de MU, o bien $V(p_j, mu_i) = 1$ o $V(p_j, mu_i) = 0$.
2. [V $\sim$]. Para cualquier fbf, α, y para cualquier $mu_i \in$ MU[43], $V(\sim\alpha, mu_i) = 1$ si $V(\alpha, mu_i) = 0$; en caso contrario $V(\sim\alpha, mu_i) = 0$.
3. [V$\vee$]. Para cualesquiera fbfs, α y β, y para cualquier $mu_i \in$ MU, $V((\alpha \vee \beta), mu_i) = 1$ si o bien $V(\alpha, mu_i) = 1$ o $V(\beta, mu_i) = 1$; en caso contrario $V((\alpha \vee \beta), mu_i) = 0$.
4. [VL]. Para cualquier fbf, α, y para cualquier $mu_i \in$ MU, $V(L\alpha; mu_i) = 1$ si para todo $mu_j \in$ MU tal que $mu_i R mu_j$, $V(\alpha, mu_j) = 1$; en caso contrario $V(L\alpha, mu_i) = 0$[44].

Una fbf, α, es válida-T SI para todos los modelos-T $<$MU, R, V$>$ y para todos los $mu_i \in$ MU, $V(\alpha, mu_i) = 1$.

Pasamos ahora a S4. La única diferencia entre el juego T y el juego S4 es que en este último la relación de visualidad (seeing-relation) debe ser además *transitiva*. (Se dice que una relación diádica, R, es transitiva SI para todo x, y y z, si xRy y yRz, entonces xRz). Un *modelo-S4* es por tanto un triple ordenado $<$MU, R, V$>$, siendo definidos MU y V igual que para el modelo-T y siendo R una relación (diádica) reflexiva y transitiva definida para todos los miembros de MU.

Una fbf, α, es válida–S4 SI para todo modelo –S4 $<$MU, R, V$>$ y para todo $mu_i \in$ MU, $V(\alpha, mu_i) = 1$.

Hay dos modos de tratar S5, correspondientes a las dos versiones del juego S5 descritas respectivamente en el texto y en la nota 39, aunque ambas, como allí explicamos, dan las mismas fórmulas como válidas. La versión de la nota al pie sigue más de cerca el método que hemos estado usando hasta ahora, por tanto la consideraremos en primer lugar. En esta versión la diferencia entre el juego S4 y el juego S5 estriba en que en el último la relación de visualidad (seeing-relation) debe ser además *simétrica*. (Se dice que una relación diádica, R, es simétrica SI

---

terminología y método propios de Kripke *vide* Apéndice 5). Anteriores intentos de definir la validez para los sistemas modales aparecen en McKinsey [1945] y Carnap [1946]. Algunas definiciones más recientes aparecen en Kanger [1957a]. Hintikka [1961] (y en todas las demás fechas) y Bayart [1958]. Para definiciones en términos del álgebra Booleana *vide* Capítulo 17. La analogía entre los sistemas modales y la teoría de la cuantificación monádica (no modal) con una variable individual (*vide* Capítulo 8) ha sido observada por varios autores: en el caso de S5 por Wajsberg [1933] (pág. 125) y en el caso de otros sistemas por Meredith [1956b], Thomas [1962] y otros.

[43] "Cualquier $mu_i \in$ MU" es una abreviatura conveniente para "cualquier objeto, mu_i, que es miembro de MU". Otra terminología de teoría de conjuntos que utilizamos es $\{x_1, \ldots, x_n\}$ para el conjunto que conste de los objetos $x_1, \ldots, x_n$ y $<x_1, \ldots, x_n>$ para el conjunto que conste de $x_1, \ldots, x_n$ en ese orden (es decir el n-múltiplo ordenado cuyos miembros sean $x_1, \ldots, x_n$).

[44] Puesto que $M\alpha = {}_{Df} \sim L \sim\alpha$, no necesitamos una regla aparte para M. Es conveniente, sin embargo, establecer tal regla y en vista de la definición debería ser: [VM]. Para cualquier fbf, α, y para cualquier $mu_i \in$ MU, $V(M\alpha, mu_i) = 1$ si para por lo menos un $mu_j \in$ MU tal que $mu_i R mu_j$, $V(\alpha, mu_j) = 1$; de lo contrario $V(M\alpha, mu_i) = 0$. El paralelismo con la regla 5 del juego T debe resultar evidente.

para todo x, y y si xRy entonces yRx). Podemos por tanto decir que un modelo –S5 es un triple ordenado $\langle$MU, R, V$\rangle$ siendo definidos MU y V igual que anteriormente, y siendo R una relación (diádica) reflexiva, transitiva y simétrica[45] definida para todos los miembros de MU.

Una fbf, α, es válida –S5 SI para todos los modelos –S5 $\langle$MU, R, V$\rangle$ y para todo $mu_i \in$ MU, V $(\alpha, mu_i) = 1$.

En la otra versión del juego S5 se establece simplemente que todos los jugadores vean a todos los jugadores (así como también, por supuesto, se vean ellos a sí mismos). Lo que de aquí resulta es que podríamos prescindir por completo de la relación de visualidad, ya que en la regla 4 la frase "todos los jugadores que Vd. pueda ver" podría significar simplemente "todos los jugadores". Por tanto otra posible definición, y más sencilla, de un modelo –S5 sería la de un par ordenado $\langle$MU, V$\rangle$ siendo definidos MU y V igual que anteriormente, con la salvedad de que ahora en lugar de [VL] tenemos:

[VL']. Para cualquier fbf, α, y para cualquier $mu_i \in$MU, V$(L\alpha, mu_i) = 1$ si para todo $mu_j \in$ MU, V$(\alpha, mu_j) = 1$; de lo contrario V$(L\alpha, mu_i) = 0$

Se dirá entonces que una fbf, α, es válida –S5 SI para todo modelo –S5 $\langle$MU, V$\rangle$ y para todo $mu_i \in$ MU, V$(\alpha, mu_i) = 1$.

Podemos, de modo análogo, dar una definición de validez para el sistema Brouweriano (validez–B). La única diferencia entre un modelo –T y un modelo –B es que en este último R debe ser simétrica además de reflexiva (no hace falta que sea transitiva como en el modelo –S4). La validez –B se define entonces como en los demás casos. El juego B será, por supuesto, el mismo que el juego T con la correspondiente restricción respecto a la relación de visualidad (seeing-relation). Dejamos al lector la prueba del axioma Brouweriano, así como el demostrar que todas las tesis de B son válidas–B, y que B es un sistema distinto que T, S4 y S5.

La interpretación intuitiva de los modelos y la validez

Es importante observar que la validez tal como la hemos definido no es ella misma una parte estructural de la fórmula. Tampoco consiste en la relación de una fórmula con otra como consiste la propiedad de ser tesis (thesishood) en un sistema axiomático (aunque se pueda demostrar que el conjunto de tesis y el conjunto de fórmulas válidas coinciden exactamente). Nuestro método para la definición de la validez se ha basado en asignar a los elementos de las fórmulas ciertos valores que no son por sí mismos parte del sistema al que pertenecen las fórmulas y en valorar las fórmulas en términos de aquellas asignaciones. Este procedimiento es lo mismo que dotar de significados a las fórmulas: en este capítulo, es decir, en contraste con los anteriores, nos hemos venido ocupando en una especie de estudio semántico de los sistemas modales[46] (De aquí las frases "definición semántica de validez", "modelo semántico", "Semántica para un sistema" que aparecerán frecuentemente en posteriores capítulos).

Lo que acabamos de decir es válido procedamos o no procedamos a señalar un significado para los propios valores 1 y 0. Intuitivamente, sin embargo, los consideramos representantes de la verdad y la falsedad, respectivamente; y al hacerlo,

---

45 Tal relación se denomina a menudo relación de *equivalencia*

46 Los sistemas modales han sido investigados de tres modos principales axiomáticamente, semánticamente y algebraicamente. Los estudios axiomático y semántico y las relaciones entre ellos dominan en este libro, pero se encontrarán algunas explicaciones del estudio algebraico en el capítulo 17.

podemos decir con propiedad, si bien de un modo un tanto vago, que hemos definido la validez de una fórmula como su verdad en todos los mundos de todos los modelos (del tipo adecuado).

La palabra "mundo" ha sido utilizada por unos cuantos lógicos en este sentido y parece ser la más conveniente, pero quizás alguna frase del estilo de "estado de hechos concebible o imaginable" expresaría la idea mejor. Lo que significa puede explicarse del siguiente modo. Supongamos que en los juegos de salón modales las letras que van siendo nombradas representan ciertas proposiciones. Podríamos especificar cómo son las cosas, o cuál es el estado del mundo, en lo que a estas proposiciones concierne, dando una lista de cuáles de ellas son verdaderas y cuáles son falsas. Variando esta lista podríamos, de modo semejante, especificar varios estados de hechos (states of affairs) que podrían haberse obtenido en lugar del que en realidad se obtiene. Cada uno de estos estados de hechos (real o simplemente concebible) es lo que queremos expresar mediante un "mundo". La hoja con letras de un jugador puede considerarse como representante de aquel mundo en que las proposiciones de su hoja son verdaderas y las proposiciones que no aparecen en su hoja son falsas. Mientras dura el juego él ha de suponer que las cosas son tal como se indica en su hoja y su respuesta a las fórmulas complejas indicará si las proposiciones así formadas son verdaderas o no, admitido tal supuesto. El considera las hojas de los demás jugadores que él ve como indicadoras de otros posibles estados de hechos concebibles, aunque quizá no actuales. Ha de suponer además que estas otras hojas representan *todos* los restantes posibles estados de hechos que él pueda concebir.

Si entonces se le pregunta a un jugador si una determinada proposición, p, es *verdadera*, él simplemente averigua si p es verdadera en su propio mundo (es decir si p aparece en su hoja). Si, en cambio, se le pregunta si p es *posible* (es decir si Mp es verdadera), será suficiente con que p figure en la hoja de alguno de los otros jugadores, ya que esto indicará que existe un estado de hechos concebible en el que p es verdadera (es decir un estado de hechos en el que p es concebible o posible) y por tanto que p es concebible o posible. Y si se le pregunta si p es necesaria (es decir si LP es verdadera) no debe bastarle el que p esté simplemente en su hoja, sino que debe estar en las de los demás también, ya que si faltase en alguna de ellas esto indicaría que p, aunque de hecho verdadera, *podría* haber sido falsa.

Así considerados, los modelos semánticos reflejan de modo evidente una conocida idea filosófica, que a menudo se atribuye a Leibniz; la de que una proposición necesaria es aquélla que es verdadera no simplemente en el mundo actual sino en todos los restantes mundos posibles también. De los sistemas que hemos considerado es el S5 el que parece expresar esta idea más claramente, ya que en un modelo S5 se requiere la verdad de p en todos los mundos de MU para la verdad de Lp en cualquiera de ellos. En el caso de T y de S4 también existe una relación que en los juegos denominamos relación de visualidad y en los modelos semánticos simplemente relación reflexiva (o para S4 relación reflexiva y transitiva). Resultado de esto es que al decidir si p es necesaria en un mundo determinado sólo tenemos que tener en cuenta el valor de p en un conjunto específico de mundos, que no tiene por qué incluir todos los mundos del modelo. Aquéllos que consideran a los miembros de MU como mundos, denominan frecuentemente a R relación de *accesibilidad* (un mundo, mu_j se dice que es accesible a un mundo, mu_i SI $mu_i R mu_j$). Adoptando este modo de definición diremos que una proposición es necesariamente verdadera en un determinado mundo SI es verdadera en todos los mundos accesibles a aquel mundo.

Este concepto de la accesibilidad de un mundo posible a otro presenta a primera vista cierto aire de fantasía o de "ciencia-ficción" (science fiction), pero podríamos asignarle un aire más serio del modo siguiente: Podemos imaginar varios mundos que difieran en determinados aspectos del mundo actual (un mundo sin teléfonos, por ejemplo). Pero, sin embargo, nuestra habilidad para hacer esto está al menos en parte determinada por el tipo de mundo en el que actualmente vivimos: la constitución de la mente humana y el cuerpo humano, los idiomas que existen o no existen, y otras muchas cosas marcan determinados límites a nuestra capacidad de concebir. Podríamos decir, entonces, que un mundo mu_2 es accesible a un mundo mu_1, si mu_2 es concebible por alguien que viva en mu_1; lo cual hará de la accesibilidad una relación entre mundos, tal como pretendemos que sea. Ahora bien, si nos encontrásemos en uno de los mundos que podemos concebir entonces nuestra capacidad de concebir podría continuar siendo en aquel mundo tal como había sido hasta entonces o podría no serlo; bien podría aumentarse o disminuirse en toda suerte de maneras; bien podríamos o bien no podríamos ser capaces de imaginar el mundo en que anteriormente vivíamos. Así pues, los mundos que son accesibles a mu_2 no tienen por qué ser los mismos que los que son accesibles a mu_1. Supongamos ahora que se le pregunta a alguien que viva en mu_1 si una determinada proposición, p, es posible (si p *podría* ser verdadera). Esta persona interpretaría esta pregunta en el sentido de que se le interroga acerca de si en algún mundo concebible (es decir desde el punto de vista de su mundo, mu_1) resultaría p verdadera; sin embargo, si existen mundos que no sean concebibles por ninguna persona que viva en mu_1 entonces tal persona no los tendrá en cuenta (ya que no puede tenerlos en cuenta). De modo semejante si se le pregunta si p es necesaria (si p ha de ser forzosamente verdadera) interpretará esta pregunta en el sentido de si en todos los mundos accesibles al suyo propio p seguiría siendo verdadera; y aquí también si existen mundos no accesibles al suyo él no puede tomarlos en consideración. En cualquier caso ésta es una de las maneras en que podemos interpretar las nociones de posibilidad y necesidad, y parece estar reflejada en T.

No es, desde luego, la única manera. En un sentido más restringido (stronger sense) de "concebir" uno no concebiría (o al menos no del todo) un mundo de un tipo determinado a menos que uno tuviera conocimiento absoluto de en qué consistiría vivir en él, y ello implicaría conocer qué capacidad de concebir tendría una persona que viviese en ese mundo. Si hubiéramos de definir la accesibilidad en términos de concebibilidad en *este* sentido, la accesibilidad sería una relación transitiva. Pues si alguna persona de mu_2 puede concebir mu_3, entonces una persona de mu_1 que pueda concebir (en sentido restringido) mu_2 sabrá lo que es concebir mu_3, para lo cual ella misma ha de ser capaz de concebir mu_3. Por tanto si mu_2 es accesible a mu_1 también lo es cualquier mundo accesible a mu_2; y con la accesibilidad como relación transitiva tenemos S4, no T. Alguna persona de mu_1 que construya "posible" según este sentido más restringido de "concebible" admitirá que p es posible si es verdadera en cualquiera de los mundos accesibles a mu_1, o en cualquier mundo accesible a cualquiera de *aquellos* mundos, ya que ellos a su vez son accesibles al propio mu_1; para esta persona será lo mismo lo necesario que lo necesariamente necesario, ya que lo que cuenta como necesariamente necesario en mu_1 es todo lo que sea verdadero en todos los mundos accesibles a mundos accesibles a mu_1; sin embargo éstos son precisamente los mundos accesibles al propio mu_1 —es decir, son precisamente los mundos en los que p ha de ser verdadero para que sea necesaria en mu_1. Estos principios encuentran, por supuesto, expresión en las leyes de reducción de S4, R3 y R4.

Hemos estado distinguiendo entre T y S4 en razón de una diferencia entre dos sentidos de "concebible" (y por tanto de "posible" y "necesario"). A grosso modo la diferencia radica entre conocer lo que sería cierto estado de hechos y conocer lo que sería vivir en ese estado de hechos. Sin embargo, este sentido más restringido de "concebible" aunque hace a la accesibilidad transitiva no la hace simétrica. Por ejemplo, podemos concebir un mundo sin teléfonos (¿no desearíamos muchos de nosotros a veces vivir en un mundo así?). Mas, de no haber habido teléfonos, muy probablemente se daría el caso de que en un mundo tal nadie sabría lo que era un teléfono y por tanto nadie podría concebir un mundo (como el nuestro) en el que haya teléfonos; es decir el mundo sin teléfono sería accesible al nuestro pero el nuestro no sería accesible a él. Y esto se daría incluso cuando se usa "concebir" en el sentido más estricto que hace válidos los axiomas de S4. Por tanto si la necesidad y la posibilidad de las proposiciones se define en términos de la concebibilidad de los mundos en este sentido, entonces, de los sistemas que hemos discutido es S4, más que T o S5, el que refleja la validez.

S5, como ya hemos mencionado, refleja por otra parte un sentido "absoluto" de la palabra "concebible" –un sentido en el que decir que un estado de hechos es concebible es decir algo acerca de *él*, sin referencia a la capacidad de concebir que puede o no puede existir en cualquier otro estado de hechos.

De este modo parece ser que podemos distinguir al menos tres sentidos distintos en los que puede decirse que un estado de hechos es concebible, pudiendo definir la necesidad y la posibilidad en relación con cualquiera de ellos; y es cuando menos discutible el que si las definimos de uno de estos modos sea T el que da un conjunto completo de principios modales ciertos, mientras que si las definimos de otro modo sea S4 el que lo haga, y si las definimos de otro nuevo modo sea S5.

Todo esto tiene una importancia todavía mayor. Hasta ahora hemos visto tres sistemas modales –cuatro si contamos el sistema Broweriano– y en posteriores capítulos nos encontraremos con muchos otros más. Esta multiplicidad de sistemas pudiera provocar la pregunta ¿Cuál sistema es el correcto? Ahora bien, el presupuesto subyacente a esta pregunta parece ser el de que estamos pensando en un sentido único de "necesidad" y "posibilidad" y que los sistemas más reducidos (weaker) que el correcto nos proporcionarán menos que toda la verdad, mientras que los sistemas más amplios (stronger) contendrán tesis que aunque plausibles son realmente falsas. Mas, sin embargo, los sistemas quizá no son rivales en este sentido. Por lo menos es posible que cierto número de sistemas pueda darnos cada uno de ellos la verdad acerca de la necesidad y la posibilidad, si bien cada uno en un sentido un tanto diferente. La simple construcción de modelos semánticos no nos proporciona una caracterización adecuada de estos distintos sentidos[47]; para ello se precisaría mucha complicada investigación filosófica, si bien, como hemos visto, los modelos semánticos pueden proporcionarnos valiosa ayuda en esta tarea.

Otro modo de mostrar que diversos sistemas modales no son rivales consistiría en correlacionar el uso de *L* en cada uno de ellos con el uso de "necesario" o alguna otra expresión semejante, en un universo de discurso ya establecido. Acerca de esto han sido hechas algunas sugerencias por Lemmon[47a]. Una de ellas es la de que si *L* se interpreta como significando "es informalmente probable en matemáticas que" entonces S4 es el sistema modal correcto; otra (hecha más bien de modo

---

47 Cf. Pollock [1967a]

47a Lemmon [1959].

aproximativo) es la de que si L significa "se da analíticamente el caso de que", entonces es S5 el que es correcto.

De este modo, de una forma u otra, la multiplicidad de los sistemas modales lejos de ser un síntoma de confusión o una fuente de perplejidad, puede, de hecho, resultar una ayuda positiva para dirigir nuestra atención hacia distinciones que podrían de otro modo pasarnos inadvertidas.

Ejercicios 4

4.1. (a) Construir una jugada-T en la que $LLp \supset LLLp$ resulte ganadora pero $Lp \supset LLp$ no lo sea.

(b) Establecer condiciones necesarias y suficientes para la relación de visualidad (seeing-relation) en tal jugada, y mostrar que son necesarias y suficientes.

(c) Demostrar que las 14 modalidades a las que nos referimos en la pág. 51 son distintas en S4.

4.2. (a) Demostrar que $p \supset LMp$ es ganadora en todas las jugadas Brouwerianas.

(b) Construir una jugada Brouweriana en la que $Mp \supset LMp$ no sea ganadora. Explicar por qué ésta no puede ser una jugada-S4.

4.3. Considerar una jugada-S4 en la que haya tres jugadores, A, B y C. A puede ver tanto a B como a C pero ni B ni C pueden ver a nadie excepto a sí mismos. La hoja de B contiene a p pero no a q, la hoja de C contiene a q pero no a p (Los restantes detalles son irrelevantes).

(a) Mostrar que en tal jugada $(Lp \dashv Lq) \vee (Lq \dashv Lp)$ no es ganadora.

(b) Mostrar que sería ganadora si o bien B puede ver a C o C puede ver a B.

4.4. Imaginar un juego que sea igual al juego T excepto en que algunos jugadores (jugadores rosa) pueden tener hojas de papel rosa (en contraste con los otros jugadores que tienen hojas blancas y a los que denominaremos "jugadores normales"). Supóngase que todos los jugadores rosa pueden ser vistos por al menos un jugador normal pero que ellos no pueden ver a nadie. Las instrucciones de un jugador normal son las mismas que en el juego T; las instrucciones de un jugador rosa se diferencian en lo siguiente únicamente: Siempre que sea nombrada $L\alpha$ él ha de mantener su mano abajo, no importa la fórmula que α pueda ser. Una expresión ha de considerarse ganadora en una jugada de este juego SI todos los jugadores *normales* levantan la mano (La validez, como de costumbre, consiste simplemente en el ganar en todas las jugadas).

(a) Mostrar que la regla de la Necesariedad (Necessitation) no es preservadora de validez en un juego tal.

(b) Mostrar que si α es válida-CP entonces $L\alpha$ es válida en este juego.

(c) Mostrar que $\vdash \alpha \dashv \beta \rightarrow \vdash L\alpha \dashv L\beta$ es preservadora de validez.

4.5. Supóngase un juego del tipo descrito en el ejercicio anterior pero con la condición de que la relación de visualidad sea transitiva.

(a) Demostrar que $Lp \supset LLp$ no es válida en un juego tal.

(b) Demostrar que $(p \dashv q) \dashv (Lp \dashv Lq)$ es válida en un juego tal.

4.6. Supóngase un juego del tipo descrito en el ejercicio 4.4 con la variante de que *debe* haber siempre al menos un jugador rosa y de que una expresión ha de considerarse ganadora SI *todos los jugadores normales pueden ver que un jugador rosa* levanta la mano.

(a) Demostrar que MMp es válida en un juego así.

(b) Demostrar que *L M Mp* es válida SI todos los jugadores normales (en todas las jugadas) pueden ver al menos a un jugador rosa.

CAPITULO V

T: PROCEDIMIENTO DE DECISION Y COMPLETITUD

Prueba de la validez-T

Como explicamos en el capítulo anterior, una fórmula, α, es válida-T SI es verdadera en todos los mundos de todos los modelos-T; es decir, SI en todos los modelos-T $\prec$MU, R, V$\succ$, V (α, mu_i) = 1 para todo $mu_i \in$MU. En este capítulo mostraremos cómo comprobar la validez-T de las fórmulas.

Para probar si una fórmula CP es válida mediante el método de tablas de verdad esbozado en el Capítulo I damos una lista de todas las distintas asignaciones-CP con respecto a las variables de la fórmula y luego comprobamos si la fórmula es verdadera para cada una de ellas. Este método puede ser aplicado en teoría a cualquier fórmula CP; e incluso para fórmulas moderadamente complicadas es un método práctico ya que para una fórmula que contenga n variables existen solamente 2^n asignaciones de valor distintas. El método correspondiente para T consistiría en dar una lista de todos los modelos-T distintos que tengan relevancia para la fórmula de que nos ocupemos y luego comprobar si la fórmula era verdadera para todos los mundos de cada uno de ellos. Ahora bien, éste sería un procedimiento seguro *en teoría*, ya que, como mostraremos más adelante (pág. 265) para cualquier fórmula particular, α, sólo es preciso considerar modelos que no tengan más que un determinado número finito de miembros de MU (dependiendo de la estructura de α), y para cualquier número finito de miembros de MU sólo puede construirse un número finito de modelos-T distintos. A pesar de esto, el número de modelos-T distintos, aunque siempre finito para cualquier fórmula, puede llegar a ser extremadamente grande, por lo que este método implicaría millones de cálculos con objeto de probar incluso una fórmula simple del todo.

Afortunadamente existen métodos más breves. El que vamos a describir[48] es una extensión de la prueba de la Reducción para la validez CP esbozada en las págs.24 y 25,con la que suponemos al lector familiarizado. En resumidas cuentas lo que intentamos es encontrar, para una determinada fbf, α, un modelo T falsificador (falsifying) (es decir, un modelo T en el cual, para al menos un $mu_i \in$MU, V (α, mu_i) = 0). El método nos permitirá construir tal modelo-T si éste es posible, o de lo contrario mostrará la imposibilidad de que exista tal modelo T. En el primer caso α no es válida por supuesto; en el segundo caso α es válida.

Describimos el método trabajando con unos cuantos ejemplos; después de esto mostraremos que el método proporciona un procedimiento de decisión para T. Por razones de conveniencia supondremos que los únicos operadores modales que

---

[48] Nuestro procedimiento es semejante en lo esencial al método de los cuadros semánticos que aparece en Kripke [1963a] y en todas las demás fechas. Para otros procedimientos de decisión para T, *vide* Von Wright [1951], Anderson [1954] y Ohnishi and Matsumoto [1957].

aparecen en las fórmulas son L y M; por supuesto siempre podemos eliminar otros operadores modales usando sus definiciones.

Primer ejemplo

$$[1]\ L(p \supset L(q \supset r)) \supset M(q \supset (Lp \supset Mr))$$

Empezamos suponiendo que en algún modelo-T existe un mundo (por ejemplo mu_1) tal que $V([1], mu_1) = 0$. Representamos esto escribiendo 0 debajo del operador principal. La regla CP [V $\supset$] da entonces inmediatamente 1 como el valor (en mu_1) del antecedente y 0 como el valor del consecuente; es decir, tenemos $V(L(p \supset L(q \supset r)), mu_1) = 1$ y $V(M(q \supset (Lp \supset Mr)), mu_1) = 0$. Esto es todo a lo que principios puramente CP pueden llevarnos en este estadio; mas, de acuerdo con [VL], si $L\alpha$ tiene el valor 1 en mu_1 la propia α tiene el valor 1 en mu_1 (así como también en todos los demás mundos accesibles a mu_1) y de acuerdo con [VM], si $M\alpha$ tiene el valor 0 en mu_1, la propia α tiene el valor 0 en mu_1 (así como también en todos los demás mundos accesibles a mu_1). Por tanto contamos por ahora con los siguientes valores:

$$\begin{array}{ccccccccc} L & (p & \supset & L & (q & \supset r)) & \supset & M & (q \supset (Lp \supset Mr)) \\ 1 & & 1 & & & & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Podemos ahora aplicar directamente [V $\supset$], [VL] y [VM] de nuevo. Obsérvese que [VL] no solamente nos obliga a dar a α el valor 1 cuando $L\alpha$ tiene el valor 1, sino que también nos obliga a dar a $L\alpha$ el valor 0 cuando α tiene el valor 0; de igual modo, de acuerdo con [VM] debemos dar a $M\alpha$ el valor 1 si hemos dado el valor 1 a α.

Por último obtenemos los siguientes valores (los números escritos arriba de la fórmula deben bastar para indicar el orden en que hemos realizado los pasos posteriores):

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} & 5 & & 7 & 5 & 6 & 5 & & & 1 & & 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & \\ L & (p & \supset & L & (q & \supset & r)) & \supset & M & (q & \supset & (L & p & \supset & M & r)) \\ 1 & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Pero aquí tropezamos con una inconsistencia, que hemos subrayado, ya que tenemos $V(p \supset L(q \supset r), mu_1) = 1$ y $V(p, mu_1) = 1$, pero $V(L(q \supset r), mu_1) = 0$, y esto va contra [V $\supset$]. Lo que esto muestra es que no sería posible ningún mundo en ningún modelo-T en el que $V([1]) = 0$; por lo tanto, [1] es válido en T.

(Normalmente señalaremos las inconsistencias en las asignaciones de valor subrayándolas como hemos hecho aquí. Tales inconsistencias pueden, sin embargo, expresarse como la asignación a la vez de los valores 1 y 0 a alguna parte bien formada de una fórmula; en el presente caso, por ejemplo, el paso 8 podría haber consistido en la asignación de 0 a p. De hecho, la manera más conveniente de definir una asignación de valor inconsistente es decir que V es una asignación de valor inconsistente para una fórmula (o conjunto de fórmulas) SI para alguna parte bien-formada, α, de aquella fórmula (o conjunto de fórmulas), $V(\alpha) = 1$ y $V(\alpha) = 0$).

Hemos podido demostrar la validez de [1] sin considerar más que un mundo. Esto ocurre raras veces, por lo que los restantes ejemplos implicarán pasos de otro tipo. Para el ejemplo siguiente tomamos una fórmula que se diferencia de [1] solamente en que la segunda L es sustituida por M.

Segundo ejemplo

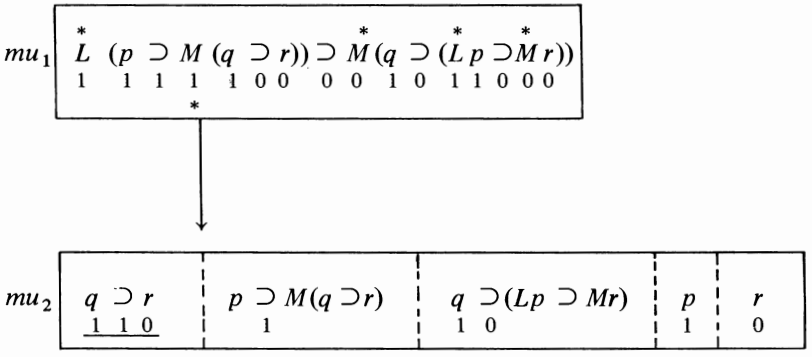
$$[2]\ L(p \supset M(q \supset r)) \supset M(q \supset (Lp \supset Mr))$$

Los mismos pasos que en [1] llevan a las siguientes asignaciones de valor en mu_1:

$$\begin{array}{c} L\,(p \supset M(q \supset r)) \supset M(q \supset (L\,p \supset M\,r)) \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \quad 0\ 0\ 1\ 0 \quad 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \qquad\quad * \quad * \end{array}$$

Aquí no nos encontramos con una inconsistencia inmediata; mas, en el lugar marcado con asteriscos tenemos $M(q \supset r)$ como verdadera y $(q \supset r)$ como falsa; es decir, tenemos una fórmula, α, tal que V $(M\alpha, mu_1) = 1$ y V $(\alpha, mu_1) = 0$. Ahora bien [VM] no prohíbe en absoluto esta combinación de valores; lo único en lo que insiste es en que si $M\alpha$ ha de ser verdadera en mu_1 entonces debe existir *algún* mundo accesible a mu_1 (no necesariamente el propio mu_1) en el que α sea verdadera. Evidentemente, en el presente caso el mundo en cuestión no puede ser mu_1, por tanto debemos suponer la existencia de otro mundo, mu_2, en el que $(q \supset r)$ sea verdadero. mu_2 debe ser, por supuesto, accesible a mu_1, y esto significa que si hemos de satisfacer [VL] y [VM] no sólo debe ser verdadero $(q \supset r)$ en mu_2 sino que para toda fbf, α, si $L\,\alpha$ es verdadera (se le asigna 1) en mu_1 entonces debe asignársele 1 a α en mu_2, y si $M\alpha$ es falsa (se le asigna 0) en mu_1 entonces debe asignársele 0 a α en mu_2. Averiguamos entonces qué valores tendríamos que obtener en mu_2 para que esto fuese así, exactamente igual que averiguamos qué valores necesitábamos en mu_1. De este modo nos encontramos con que en mu_2 V $(q \supset r) = 1$, V $(p \supset M(q \supset r)) = 1$, V $(q \supset (Lp \supset Mr)) = 0$, V $(p) = 1$, V $(r) = 0$. Mas, pocos cálculos se necesitan para ver que esta situación no puede darse en ningún mundo, ya que V $(q \supset (Lp \supset Mr)) = 0$ nos da V $(q) = 1$ y esto junto con V $(r) = 0$ da V $(q \supset r) = 0$ que está en contradicción con V $(q \supset r) = 1$. Por tanto no podría existir ningún mundo que cumpliese las condiciones para mu_2 y por tanto [2] no podría tener el valor 0 en ningún mundo; es decir, [2] es válido-T.

Podemos mostrar la totalidad de los cálculos mediante diagramas, como sigue:



En el diagrama cada rectángulo representa un mundo y la flecha representa la relación de accesibilidad. En el rectángulo mu_1 está escrita la fórmula que ha de ser probada, [2], con los valores que tienen que ser asignados a sus partes bien-formadas si hemos de conseguir V ([2], mu_1) = 0. El asterisco debajo de la M indica la necesidad de otro mundo, mu_2, accesible a mu_1, en el cual el argumento de M será verdadero, si [2] ha de ser falsa en mu_1. El asterisco por encima de las Ls y Ms sirve como recordatorio de que en cualquier mundo accesible a mu_1 los argumentos de estos operadores deben ser verdaderos y falsos, respectivamente. En el segundo rectángulo escribimos las asignaciones de valor que deben hacerse en

mu_2; y el subrayado señala la inconsistencia que se origina cuando tratamos de hacer estas asignaciones, e indica, por tanto, la validez de [2].

Llamaremos a un diagrama del tipo que acabamos de construir *diagrama-T semántico*, y a la totalidad del método, *método de diagramas semánticos*.

En este ejemplo hemos utilizado [VM] para demostrar que cuando tenemos $V(M\alpha, mu_1)=1$ y $V(\alpha, mu_1)=0$, el modelo debe contener un mundo mu_2, accesible a mu_1, tal que $V(\alpha, mu_2)=1$. De modo semejante si en mu_1 teníamos $V(L\alpha, mu_1)=0$ y $V(\alpha, mu_1)=1$, [VL] nos exigirá presuponer un mundo accesible a mu_1 en el cual $V(\alpha)=0$, ya que si en todos los mundos accesibles a mu_1 teníamos $V(\alpha)=1$, debemos tener $V(L\alpha, mu_1)=1$. Establecemos ahora estas reglas de modo explícito y general:

I *Regla para poner asteriscos*

Se pone un asterisco por encima de cada L que tiene un 1 por debajo y por encima de cada M que tiene un 0 por debajo. Se pone un asterisco debajo de cada L que tiene un 0 por debajo y debajo de cada M que tiene un 1 por debajo.

II *Reglas para un nuevo mundo*

A. Si en un mundo mu_i aparece una fórmula $L\alpha$ con un asterisco por encima de la L entonces debe asignársele 1 a α, en todos los mundos accesibles a mu_i (incluyendo el propio mu_i).

B. Si en un mundo mu_i aparece una fórmula $M\alpha$ con un asterisco por encima de la M, entonces en *todos* los mundos accesible a mu_i (incluyendo el propio mu_i) a α debe asignársele 0.

C. Si en un mundo mu_i aparece una fórmula $L\alpha$ con un asterisco debajo de la L entonces debe existir un mundo accesible a mu_i (el propio mu_i o algún otro) en el que se le asigne a α 0.

D. Si en un mundo mu_i aparece una fórmula $M\alpha$ con un asterisco debajo de la M entonces debe existir un mundo accesible a mu_i (el propio mu_i o algún otro) en el cual a α se le asigne 1.

Debe quedar claro que cuando construimos nuevos mundos de acuerdo con estas reglas lo hacemos de modo tal que se satisfagan [VL] y [VM]. En términos de los diagramas un mundo, mu_i, se representa mediante un rectángulo, escribiendo "mu_i" al lado de él; y cuando, a fin de satisfacer C o D, se requiere un mundo mu_j accesible a mu_i, dibujamos un rectángulo al que designamos mediante "mu_j" con una flecha que parta de mu_i y llegue hasta él para representar la accesibilidad. Ciertas fórmulas tendrán que ser escritas en mu_j y ciertos valores les tendrán que ser asignados conforme a las reglas de II. (A - D). Denominaremos a estos valores, valores iniciales de mu_j; a los valores que luego tenemos que asignar a diversas partes bien-formadas de las fórmulas de mu_j les denominamos valores *consiguientes* (consequential) de mu_j. Cuando el valor de un operador modal con un asterisco por debajo es el mismo que el valor de su argumento entonces se satisfarán las reglas C y D sin que tengamos que dibujar un nuevo rectángulo. (Y, por supuesto, en tales casos podemos omitir el asterisco).

Tercer ejemplo

[3] $L(p \vee Mq) \supset (Lp \vee Mq)$

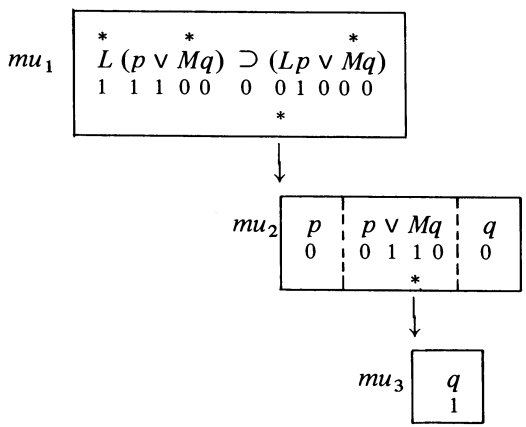
Si suponemos que $V([3], mu_1)=0$ entonces las reglas CP nos darán los siguientes valores (en mu_1):

$$mu_1 \quad \boxed{\begin{array}{ccccccc} * & & & & & & * \\ L & (p \vee Mq) & \supset & (Lp & \vee & Mq) \\ 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & * & & \end{array}}$$

Las reglas A y B proporcionan entonces $V((p \vee Mq), mu_1) = 1$ y $V(q, mu_1) = 0$. Copiando el valor 0 para Mq debajo de sus restantes apariciones y aplicando [V∨] obtenemos $V(p, mu_1) = 1$. Por tanto tenemos (en mu_1):

$$mu_1 \quad \boxed{\begin{array}{ccccccccc} * & & & * & & & & & * \\ L & (p & \vee & Mq) & \supset & (Lp & \vee & Mq) \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & * & & & \end{array}}$$

Puesto que ahora tenemos Lp falsa y en cambio p verdadera en mu_1, la regla C nos exige tener un mundo, mu_2, accesible a mu_1, en el cual p sea falsa; y las reglas A y B exigen que en mu_2 $(p \vee Mq)$ sea verdadera y q falsa (Todos estos son valores iniciales de mu_2). Estos valores de mu_2 son compatibles entre sí, pero proporcionan $V(Mq, mu_2) = 1$ y $V(q, mu_2) = 0$. De acuerdo con la regla D necesitamos, por tanto, otro nuevo mundo en el modelo, mu_3, en el cual q sea verdadera. Esta es, sin embargo, la única restricción en las asignaciones de valor en mu_3, por tanto no puede originarse inconsistencia alguna. Hemos encontrado por tanto un modelo-T falsificacador (falsifying) para [3], y esto demuestra que no es válido-T. El diagrama es como sigue:



$$mu_1 \quad \boxed{\begin{array}{ccccccccc} * & & & * & & & & & * \\ L & (p & \vee & Mq) & \supset & (Lp & \vee & Mq) \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & * & & & \end{array}}$$

$$\downarrow$$

$$mu_2 \quad \boxed{\begin{array}{c|c|c} p & p \vee Mq & q \\ 0 & 0\ 1\ 1\ 0 & 0 \\ & * & \end{array}}$$

$$\downarrow$$

$$mu_3 \quad \boxed{\begin{array}{c} q \\ 1 \end{array}}$$

Este diagrama representa el siguiente modelo-T: MU = $\{mu_1, mu_2, mu_3\}$. Sólo son válidas las relaciones de accesibilidad: $mu_1 R mu_2$ y $mu_2 R mu_3$, aparte de la accesibilidad de cada mundo a sí mismo. $V(p, mu_1) = 1$; $V(q, mu_1) = 0$; $V(p, mu_2) = 0$; $V(q, mu_2) = 0$; $V(q, mu_3) = 1$ (El valor de p en mu_3 es irrelevante; puede ser tanto 1 como 0). [3] no es válido porque en este modelo-T, $V([3], mu_1) = 0$[49].

Podemos, si así lo deseamos, comprobar que esto es así mediante el siguiente cálculo. Cada línea horizontal representa las asignaciones de valor en uno de los mundos, mu_1, mu_2 y mu_3. Las flechas indican las relaciones de accesibilidad. Dadas las asignaciones iniciales para p y q se realizan los cálculos de acuerdo con las reglas de la asignación-T. Para evitar confusión sólo se han anotado en la tabla los valores relevantes

	p	q	Mq	$p \vee Mq$	$L(p \vee Mq)$	Lp	Mq	$Lp \vee Mq$	$L(p \vee Mq) \supset (Lp \vee Mq)$
mu_1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
↓									
mu_2	0	0	1	1					
↓									
mu_3		1							

Cuarto ejemplo

[4] $M(p \cdot Mq) \supset (LMp \supset MLq)$

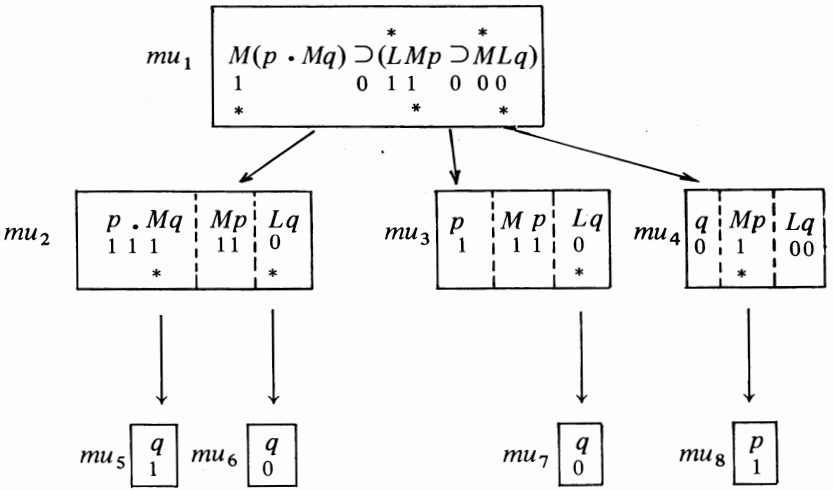
Siguiendo diversos pasos que a estas alturas ya no hará falta indicar llegamos a lo siguiente:

$$mu_1 \quad \boxed{\begin{array}{ccccccc} & & & * & & * & \\ M(p \cdot Mq) & \supset & (& LMp & \supset & MLq &) \\ 1 & & 0 & 1\ 1 & & 0\ 0\ 0 & \\ * & & & * & & * & \end{array}}$$

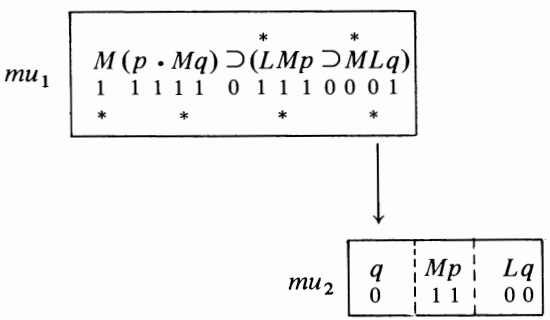
Todavía no contamos con valores definidos para p, q o Mq en mu_1. Es evidente, sin embargo, que el valor de $(p \cdot Mq)$ en mu_1 no importa en tanto en cuanto exista algún mundo (accesible a mu_1) en el que su valor sea 1. De modo semejante lo único que se necesita en el caso de p y q es que en algún mundo (accesible a mu_1) $V(p) = 1$, y que en algún mundo (accesible a mu_1) $V(q) = 0$.

En otras palabras, el hecho de que no hayan sido asignados más valores en mu_1 no impide en modo alguno la aplicación de las reglas A - D. Continuando el procedimiento obtenemos el siguiente diagrama que muestra que [4] no es válido:

[49] Para ser estrictos, tenemos aquí dos modelos T falsos para [3], no uno: ya que el modelo en el que $V(p, mu_3) = 1$ es distinto del modelo en el que $V(p, mu_3) = 0$. Muy a menudo, como en este caso, un rectángulo especifica no un mundo único sino un conjunto de mundos que difieren entre sí sólo en aspectos que son irrelevantes a la validez de la fórmula que se comprueba.



Muchas veces podemos abreviar un diagrama como éste, ya que en vez de construir un rectángulo nuevo cada vez que necesitamos uno, podemos encontrar que un rectángulo que ya hemos construido contiene los valores que se precisan en el nuevo rectángulo, o que se puede hacer que los contenga rellenándolo con valores que aunque no eran precisos en el rectángulo ya existente son compatibles con él. De este modo nuestro diagrama presente puede reducirse a lo siguiente:



Lo que aquí ha ocurrido es que nos hemos encontrado con que es posible hacer que el propio mu_1 se encargue de las funciones para las que anteriormente construíamos muchos rectángulos nuevos y que sólo se precise un rectángulo más.

Aunque este tipo de reducciones puede, evidentemente, ahorrar mucho tiempo en la práctica, supondremos en nuestras discusiones teóricas que no se ha hecho uso de ellas. En un diagrama-T en el que no se utilicen reducciones no aparecerá ningún valor en ningún rectángulo a menos que se precisen explícitamente, de acuerdo con las reglas del método.

Quinto ejemplo

$$[5]\ L(Mp \equiv Mq) \supset L(p \equiv Lq)$$

El primer rectángulo en el diagrama para [5] será:

mu_1

$$\begin{array}{l} \overset{*}{L\,(Mp \equiv Mq)} \supset L\,(p \equiv Lq) \\ 1 \qquad 1 \qquad 0\ 0 \\ \qquad\ \dagger \qquad\ \ * \end{array}$$

En el lugar marcado con una † nos encontramos con una situación que puede también originarse en la prueba de Reducción CP (págs. 24 y 25): un operador de función de verdad (truth-functional) tiene un valor debajo de él pero no podemos determinar de un modo no ambiguo los valores de los argumentos. Denominamos a un operador tal, por razones de brevedad, *operador-*†. En el presente caso el primer ≡ en [5] es un operador-† en mu_1; de acuerdo con [V ≡], si $(Mp \equiv Mq)$ ha de tener el valor 1 en mu_1, entonces *Mp* y *Mq* deben tener el mismo valor en mu_1, pero de momento la asignación no nos indica qué valor es éste. Por tanto tenemos dos casos que considerar, uno en el que a *Mp* y a *Mq* les ha sido asignado 1, y otro en el que a ambas se les ha asignado 0. Podemos representarlos de este modo:

$mu_1\,(i)$

$$\begin{array}{l} \overset{*}{L\,(Mp \equiv Mq)} \supset L\,(p \equiv Lq) \\ 1\ 1 \quad 1\ 1 \quad 0\ 0 \\ \quad\ * \quad\ \ * \quad\ \ * \end{array}$$

$mu_1(ii)$

$$\begin{array}{l} \overset{*\ \ *}{L\,(Mp} \equiv \overset{*}{Mq}) \supset L\,(p \equiv Lq) \\ 1\ 0 \quad 1\ 0 \quad 0\ 0 \\ \qquad\qquad\ \ * \end{array}$$

Como en los casos semejantes, en la prueba de Reducción CP, [5] es válido únicamente en el caso de que cada una de las asignaciones lleve a una inconsistencia; es decir, cuando cualquiera de ellas nos lleva a un modelo falsificador (falsifying) [5] no es válido. Ahora bien, ni $mu_1\,(i)$ ni $mu_2\,(ii)$ contienen ningún operador-†; por tanto, podemos comenzar un diagrama-T con cada una de ellas de acuerdo con nuestras reglas anteriores. Tomamos primero $mu_1\ (ii)$, ya que es la más sencilla. Esto nos lleva a una inconsistencia, como muestra el siguiente diagrama:

$mu_1\ (ii)$

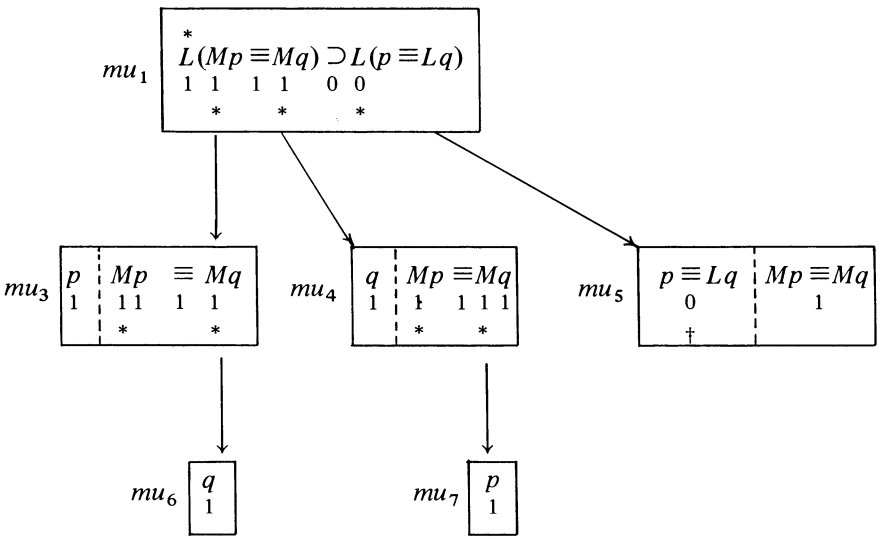
$$\begin{array}{l} \overset{*\ \ *}{L\,(Mp} \equiv \overset{*}{Mq}) \supset L\,(p \equiv Lq) \\ 1\ 0\ 0 \quad 1\ 0\ 0 \quad 0\ 0\ 0 \quad 1\ 0\ 0 \\ \qquad\qquad\qquad\ \ * \qquad\ \ * \end{array}$$

$\downarrow$

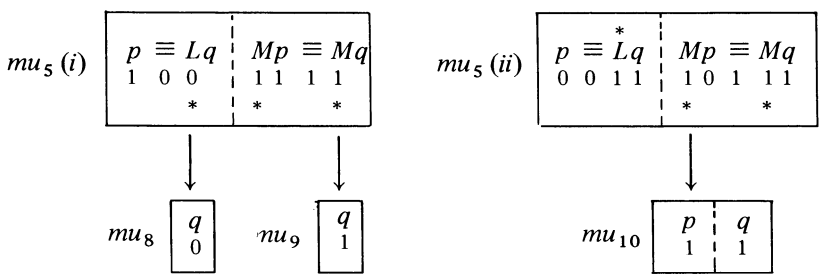
mu_2

$p \equiv Lq$	$Mp \equiv Mq$	p	q
0 0 0 0	1	0	0

$mu_1\ (i)$, sin embargo, nos da esto:



Aquí, en mu_5, nos encontramos con que se origina la misma situación que en mu_1, a saber, la aparición de un operador-† (En realidad en mu_5 contamos con dos operadores-†, aunque hemos colocado sólo un † debajo de uno de ellos, de acuerdo con una regla que estableceremos próximamente). De acuerdo con [V ≡] si $(p \equiv Lq)$ ha de tener el valor 0 en mu_5, p y Lq deben tener valores distintos en mu_5, pero hasta el momento las asignaciones no nos dicen cuáles han de ser estos valores. Por tanto tenemos que considerar dos casos para p y Lq en mu_5, exactamente igual como tuvimos que hacerlo para Mp y Mq en mu_1, y decidiremos que mu_5 contiene una inconsistencia SI cada uno de estos casos nos lleva a una inconsistencia. Representamos estos dos casos como sigue:



Ni mu_5 (*i*) ni mu_5 (*ii*) nos llevan a inconsistencia, aunque desde luego, para mostrar que mu_5 no es inconsistente habría sido suficiente con que uno de ellos no nos llevara a inconsistencia. Así pues si sustituyésemos mu_5 por cualquiera de ellos, mu_5 (*i*) o mu_5 (*ii*), en el diagrama, que comienza por mu_1 (*i*), podríamos utilizar el diagrama así obtenido para construir un modelo falsificador (falsifying) para [5] y mostrar así que no es válido. Dejamos al lector la comprobación de esto.

Obsérvese que en el presente caso ni mu_5 (*i*) ni mu_5 (*ii*) contienen operador-† alguno, ya que en cada caso las asignaciones a p y Lq nos permiten dar valores definidos a Mp y Mq, argumentos del otro operador-† de mu_5. Mas si esto no hubiera

ocurrido –si, por ejemplo, en mu_5 (*i*) no hubiéramos tenido valores definidos para *Mp* y *Mq*– habríamos puesto un † debajo del ≡ en (*Mp* ≡*Mq*) en aquel rectángulo y habríamos construido otros en su lugar (alternatives) que habríamos denominado (mu_5 (*i*)) (*i*) y (mu_5 (*i*)) (*ii*). En términos generales si aparecen operadores-†, por la razón que sea, en cualquier rectángulo, mu_1 ponemos un † debajo de uno de ellos (establezcamos, por ejemplo, para contar con una regla, el primero a la izquierda) y construimos sustitutos (alternatives) de la forma que hemos descrito. Puesto que mu_1 sólo puede contener un número finito de operadores funcionales de verdad, la de construir sustitutos, sustitutos de los sustitutos, y así sucesivamente, ha de ser una tarea finita.

Estableceremos ahora una regla general para tratar con operadores-† que puedan aparecer en la construcción de un diagrama-T. No nos vendría mal establecer nuevamente lo que es un operador-†. Un operador-† en un rectángulo, mu_i es un operador funcional de verdad[50] que tiene un valor por debajo de él en mu_i pero cuyos argumentos no tienen valores determinados de forma no ambigua en mu_i. Obsérvese que si seguimos estrictamente el sistema de poner un † debajo solamente de un operador-† en cualquier rectángulo dado[51] el mayor número de sustitutos (alternatives) que podemos tener para cada rectángulo es 3: esto ocurrirá cuando el operador en cuestión sea ∨ o ⊃ con 1 debajo de él, o · con 0 debajo de él, y los valores de ambos argumentos estén indeterminados. En los demás casos habrá solamente dos sustitutos (alternatives).

III *Regla para los sustitutos* (alternatives)

Si un rectángulo, mu_i, contiene uno o más operadores-† colocamos un † debajo del primero de la izquierda. Hacemos que mu_i (*i*) y mu_i (*ii*) (o mu_i (*i*), mu_i (*ii*) y mu_i (*iii*)) sean los dos (o los tres) rectángulos cada uno de los cuales reproduce exactamente a mu_i y además contiene uno distinto de las asignaciones de valor para los argumentos del operador bajo el cual aparece el † en mu_i, que son compatibles con el valor debajo del operador. Llamamos a estos rectángulos los ***sustitutos*** (alternatives) de mu_i, y comenzando por cada uno de ellos, sucesivamente, construimos un nuevo diagrama-T. SI cada uno de estos diagramas contiene una inconsistencia consideramos inconsistente al propio mu_i.

En cada sustituto (alternative) de mu_i los valores ***iniciales*** son todos los valores iniciales de mu_i junto con los valores asignados en aquel sustituto a los argumentos del operador bajo el cual aparece el † en mu_i.

Nota: No se dibujan flechas a partir de rectángulos que contengan †.

Resumen del método

Comenzamos siempre escribiendo la fórmula que ha de ser probada, α, en un rectángulo, mu_i y dándole la asignación inicial 0. En el interior de cada rectángulo calculamos los valores consiguientes (consequential) de mu_i antes de continuar adelante (es decir todos los valores de las partes bien-formadas de las fórmulas de mu_i que sean determinadas de un modo no ambiguo por las asignaciones iniciales

---

50 Si un operador *modal* tiene un valor debajo de él pero no podemos determinar el valor de su argumento de un modo no ambiguo, tratamos el caso mediante la regla para asteriscos debajo de operadores, no construyendo diagramas alternativos.

51 A veces es más rápido en la práctica poner una † debajo de más de un operador de un rectángulo, enumerar las *n* posibles combinaciones de valores de sus argumentos y construir *n* diagramas alternativos, uno para cada uno de ellos. Dejamos para el lector el desarrollo de los detalles. En nuestra exposición presuponemos que no se ha realizado ninguna de tales reducciones.

de mu_i, las reglas del CP y [V*L*] y [V*M*]). Los rectángulos que no sean mu_1 se construyen de acuerdo con las siguientes reglas:

I. Regla para poner asteriscos (pág. 81);
II. Reglas para un nuevo mundo (pág. 81);
III. Regla para los sustitutos (alternatives) (pág. 87).

Una vez que hemos aplicado todas estas reglas tantas veces como sea posible decimos que tenemos un *sistema completo de diagramas-T para* α.

Definimos ahora un *rectángulo inconsistente* en un sistema completo de diagramas-T como sigue:

1. Cualquier rectángulo en el que se asignen a la vez, inicialmente o consiguientemente, 1 y 0 a la misma fórmula (o parte bien-formada de una fórmula) es un rectángulo inconsistente (Denominamos a estos rectángulos *rectángulos explícitamente inconsistentes*; son los que tienen valores subrayados en los diagramas que hemos dibujado).
2. Cualquier rectángulo al que sea accesible un rectángulo inconsistente es un rectángulo inconsistente.
3. Cualquier rectángulo cuya totalidad de sustitutos (alternatives) sea inconsistente es un rectángulo inconsistente.

Una fbf es válida-T SI el primer rectángulo en su sistema completo de diagramas-T, mu_1, es inconsistente.

Diagramas semánticos como procedimiento de decisión para T

Tenemos ahora que demostrar que el método de diagramas semánticos proporciona un procedimiento de decisión para T.

Diremos que un diagrama-T (o un sistema de diagramas-T) *se termina* cuando (i) han sido construidos los diagramas sustitutos (alternatives) apropiados para todos los rectángulos que contengan un †, y (ii) en todos los rectángulos que no contengan un † se ha tratado a cada asterisco bajo un operador modal de acuerdo con las reglas C y D (pág. 81); o cuando, antes de llegar a este estadio, se ha demostrado que el rectángulo inicial es inconsistente.

Es además conveniente definir el *grado modal de un rectángulo* como el grado modal de la fórmula de mayor grado modal que aparezca en él.

Ahora bien, todos los diagramas-T (o sistemas de diagramas-T) se terminan en un número finito de pasos, por la siguiente razón. Siempre que una flecha vaya de un rectángulo, mu_i, a un rectángulo, mu_j, todas las fórmulas de mu_j serán los argumentos de operadores modales de mu_i, y por tanto mu_j será de grado modal inferior que mu_i. De esto se sigue que cualquiera que sea el grado modal de la fórmula inicial de mu_1 al final (a menos que el diagrama se termine antes) obtendremos rectángulos que contengan solamente fórmulas de grado 0 (es decir, fórmulas CP); y puesto que no pueden aparecer asteriscos debajo de las fórmulas CP, el diagrama se terminará entonces, si no se terminó antes. Más aún, cada sustituto (alternative) de un rectángulo, mu_i, es evidentemente del mismo grado modal que el propio mu_i; y como ya hemos visto, sólo puede existir un número finito de sustitutos (alternatives) sustitutos de sustitutos y demás, de mu_i.

Además, el método puede ser aplicado a cualquier fbf de T; ya que especifica explícitamente un valor inicial para la fórmula única del primer rectángulo y dado esto proporciona un modo efectivo de proseguir hasta que se termina el diagrama (o sistema de diagramas).

Por último este método proporciona en cada caso un resultado no ambiguo. Ya que en el caso de cualquier fbf, α, o bien se demuestra que el primer rectángulo, mu_1, es inconsistente, o de lo contrario se terminará el sistema completo de diagramas-T para α sin demostrarse que mu_1 sea inconsistente. En el primer caso hemos mostrado que en cualquier mundo de cualquier modelo-T V (α) podría ser 0 solamente si ese modelo contuviese algún "mundo" que no pudiese ser en absoluto un mundo de un modelo-T, ya que ello va contra las condiciones exigidas para que las Vs sean una asignación-T; y por tanto que en todos los mundos de todos los modelos-T, V (α) = 1, es decir que α es válida-T. Y en el segundo caso podemos usar el diagrama-T para construir un modelo-T falsificador (falsifying) para α, y por tanto α no es válida-T.

La completitud (completeness) de T[52]

Demostraremos ahora que T es completo (en sentido laxo); es decir que toda fórmula válida–T es una tesis del sistema axiomático T. Lo demostraremos haciendo ver que siempre que una fbf, α, resulte ser válida de acuerdo con el método de diagramas–T semánticos, podemos construir una prueba de α en el sistema axiomático.

Para simplificar lo que sigue supondremos que todos los operadores modales que no sean *L* han sido eliminados mediante sus definiciones y que el procedimiento de decisión ha sido aplicado como si no tuviéramos reglas para *M*. Esto significa que en cada rectángulo será asignado 0 inicialmente a una sola fórmula y 1 a todas las demás.

De momento comenzamos por casos en los que el diagrama no contiene operadores–†. Más adelante indicaremos cómo resolver los diagramas que los contengan.

A grosso modo nuestra prueba tendrá la siguiente forma: indicaremos cómo construir, para cada rectángulo, mu_j, una fórmula determinada que denominaremos $\mathbf{mu_j}'$. Las reglas para construir estas fórmulas garantizarán que $\mathbf{mu_1}'$ es la propia α (la fórmula inicial de mu_1). Entonces probaremos dos lemas:

LEMA 1

Para cualquier rectángulo, mu_j, si mu_j es explícitamente inconsistente entonces $\vdash_T \mathbf{mu_j}'$[53].

LEMA 2

Para cualquier rectángulo, mu_j, que sea accesible a un rectángulo, mu_i, si $\vdash_T \mathbf{mu_j}'$ entonces $\vdash \mathbf{mu_i}'$.

Puesto que siempre se puede obtener mu_1 a partir de cualquier mu_i en un número finito de pasos, se seguirá de estos lemas que si cualquier rectángulo del diagrama–T es explícitamente inconsistente, entonces $\vdash_T \mathbf{mu_1}'$ – es decir $\vdash_T \alpha$.

Cada $\mathbf{mu_j}'$ es la disyunción de la fórmula de mu_j cuya asignación inicial es 0 y las negaciones de todas las fórmulas de $\mathbf{mu_j}'$ cuya asignación inicial es 1. De este modo si mu_j (con asignaciones iniciales) es:

---

52 Una prueba de completitud basada en cuadros semánticos que es en muchos aspectos igual a la nuestra aparece en Kripke [1963a]. Para pruebas de distinto tipo *vide* Capítulos 9 y 17.

53 Cuando α es cualquier fbf, $\vdash_{T\alpha}$ significa que α es una tesis de T. Utilizaremos otros subíndices de $\vdash$ de forma análoga.

$Lp \supset \sim Lq$	$p \supset L\,(r \supset q)$	r
0	1	1

entonces $\mathbf{mu_j}'$ es:

$$(Lp \supset \sim Lq) \vee \sim(p \supset L(r \supset q)) \vee \sim r$$

Debe quedar claro que el asignar 0 a $\mathbf{mu_i}'$ producirá como resultado el dar precisamente sus asignaciones iniciales a todas las fórmulas de mu_j ; y por tanto habríamos obtenido exactamente las mismas asignaciones de valor para todas las partes bien-formadas de las fórmulas de mu_j si hubiéramos contado simplemente con la sola fórmula $\mathbf{mu_j}'$ y le hubiéramos asignado 0. También debe quedar claro que puesto que mu_1 contiene únicamente la sola fórmula α y a α se le asigna 0 en mu_1 entonces $\mathbf{mu_1}'$ es la propia α .

Como paso para la demostración del Lema 1 establecemos y probamos el

LEMA 3

Para cualquier rectángulo, mu_j, y para cualquier parte bien-formada β de cualquier fórmula de mu_j, si a β se le asigna 0 (inicialmente o consiguientemente) en mu_j entonces $\vdash_T (\beta \supset \mathbf{mu_j}')$ y si a β se le asigna 1 entonces $\vdash_T (\sim\beta \supset \mathbf{mu_j}')$.

PRUEBA DEL LEMA 3

Como señalábamos anteriormente podemos considerar a mu_1' como la única fórmula de mu_j con la asignación inicial 0. Ahora bien, cuando $\gamma_1,\ldots, \gamma_k$ son las únicas partes bien-formadas de las fórmulas de mu_j, para el cual se ha asignado tanto a aquéllas como a $L\,\gamma_1,\ldots, L\,\gamma_k$ un valor, podemos mostrar que:

(i) Si a β se le asigna 0 entonces

$$((L\,\gamma_1 \supset \gamma_1) \ldots\ldots (L\,\gamma_k \supset \gamma_k)) \supset (\beta \supset \mathbf{mu_j}')$$

es válida–CP (es decir es una muestra de sustitución de una tautología CP); y

(ii) Si a β se le asigna 1 entonces

$$((L\,\gamma_1 \supset \gamma_1) \ldots\ldots (L\,\gamma_k \supset \gamma_k)) \supset (\sim\beta \supset \mathbf{mu_j}')$$

es válida–CP

Demostramos esto como sigue:

(i) Al calcular los valores consiguientes (consequential) de mu_j, comenzando a partir de la asignación de 0 a $\mathbf{mu_j}'$ y terminando con la asignación de 0 a β demostramos que iríamos contra las reglas de una *asignación–CP* si diésemos el valor 0 a $\mathbf{mu_i}'$, el valor 1 a γ cada vez que diéramos 1 a $L\,\gamma$, el valor 0 a $L\,\gamma$ cada vez que diéramos el valor 0 a γ, y diéramos sin embargo el valor 1 a β. Mas es fácil comprobar que éste es el único tipo de asignación-CP que podría hacer falso (falsify)

$$((L\,\gamma_1 \supset \gamma_1) \ldots\ldots (L\,\gamma_k \supset \gamma_k)) \supset (\beta \supset \mathbf{mu_j}')$$

De aquí que, puesto que el único tipo de asignación que podría hacerla falsa se ha demostrado que es imposible, la fórmula debe ser válida–CP.

(ii) Se trata de la misma prueba, con la excepción de que aquí deberíamos poder dar el valor 0 a β si la fórmula ha de resultar falsa y *esto* puede demostrarse que viola las reglas de una asignación–CP.

Ahora bien puesto que T contiene una base que sabemos que es completa para CP, toda muestra de sustitución de una tautología–CP es un teorema de T. Por tanto si a β se le asigna 0 en mu_j tenemos:

$$\vdash_T ((L\ \gamma_1 \supset \gamma_1) \ldots\ldots\ (L\ \gamma_k \supset \gamma_k)) \supset (\beta \supset \mathbf{mu_j}')$$

y a partir de esto, de acuerdo con A5, Adjunción y MP, obtenemos:

$$\vdash_T (\beta \supset \mathbf{mu_j}')$$

De modo semejante si a β se le asigna 1 en mu_j tenemos:

$$\vdash_T (\beta \supset \mathbf{mu_j}') \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Podemos ahora probar el Lema 1, a saber, que para cualquier rectángulo, mu_j, si mu_j es explícitamente inconsistente entonces $\vdash_T \mathbf{mu_j}'$.

PRUEBA DEL LEMA 1

Si mu_j es un rectángulo explícitamente inconsistente, entonces existe alguna parte bien-formada, β, de alguna fórmula de mu_j tal que a β se le asigna a la vez 1 y 0 en mu_j. Por tanto, de acuerdo con el Lema 3, $\vdash_T (\sim\beta \supset \mathbf{mu_j}')$; y $\vdash_T (\beta \supset mu_j')$; y por tanto de acuerdo con $(\sim p \supset q) \supset ((p \supset q) \supset q)$ y MP, $\vdash_T \mathbf{mu_j}'$.

Demostramos ahora el Lema 2, a saber, que para cualquier rectángulo, mu_j, que sea accesible a un rectángulo, mu_i, si $\vdash_T \mathbf{mu_j}'$ entonces $\vdash_T \mathbf{mu_i}'$.

PRUEBA DEL LEMA 2

Si mu_i y mu_j son el mismo rectángulo evidentemente el Lema es válido.

Si hemos construido un rectángulo mu_j a partir de mu_i de acuerdo con las reglas del procedimiento de decisión, entonces las fórmulas iniciales de mu_j serán las siguientes:

(a) Un conjunto de fórmulas, $\beta_1, \ldots, \beta_k$, a cada una de las cuales se le asigna 1 en mu_j y siendo todas las fórmulas tales que a $L\,\beta_1, \ldots, L\,\beta_k$ se les asigne 1 en mu_i ($k \geqslant 0$, puesto que pudiera no existir tal fórmula en mu_i);

(b) Una fórmula, γ, a la que se asigna 0 en mu_j, siendo $L\,\gamma$ una fórmula a la que se le asigna 0 en mu_i[54].

De este modo $\mathbf{mu_j}'$ será la fórmula $(\sim\beta_1 \vee \ldots \vee \sim\beta_k \vee \gamma)$ y por tanto (de acuerdo con la hipótesis del Lema) tenemos:

$$\vdash_T (\sim\beta_1 \vee \ldots \vee \sim\beta_k \vee \gamma)$$

De aquí, de acuerdo con la regla de Necesariedad (Necessitation):

$$\vdash_T L\,(\sim\beta_1 \vee \ldots \vee \sim\beta_k \vee \gamma)$$

es decir de acuerdo con Def $\supset$:

$$\vdash_T L(\beta_1 \supset (\ldots \supset (\beta_k \supset \gamma) \ldots)$$

a partir de la cual, mediante repetidas aplicaciones de A6:

$$\vdash_T L\beta_1 \supset (\ldots \supset (L\beta_k \supset L\gamma) \ldots)$$

es decir, de acuerdo con Def $\supset$:

$$(1) \quad \vdash_T (\sim L\beta_1 \vee \ldots \vee \sim L\beta_k \vee L\gamma)$$

---

[54] Como mencionamos anteriormente presuponemos que se ha eliminado *M*.

Ahora bien en mu_i se le asigna a cada una de las $L\beta_1$, ..., $L\beta_k$ 1 y 0 a $L\gamma$. Por tanto, (de acuerdo con el Lema 3) tenemos:

$$\vdash_T (\sim L\beta_1 \supset \mathbf{mu_i}'), ..., \vdash_T (\sim L\beta_k \supset \mathbf{mu_i}'), \text{ y } \vdash_T (L\gamma \supset \mathbf{mu_i}')$$

y a partir de aquí (de acuerdo con CP):

$$\vdash_T ((\sim L\beta_1 \vee ... \vee \sim L\beta_k \vee L\gamma) \supset \mathbf{mu_i}')$$

lo cual, junto con (1) nos proporciona de acuerdo con MP:

$$\vdash_T \mathbf{mu_i}'$$

(Si $k = 0$, simplemente establecemos $\vdash_T L\gamma$ de acuerdo con N, y usamos el Lema 3 como anteriormente).

Esto completa la prueba del Lema 2.

Los Lemas 1 y 2 bastan para demostrar que si α es válida-T entonces $\vdash_T \alpha$, excepto en los casos en los que el diagrama-T para α contiene operadores-†. Mostramos ahora cómo extender la prueba para incluir estos casos.

Simplificaremos las cosas si suponemos que todas las fórmulas de un rectángulo, mu_i están escritas en notación primitiva. Entonces el único caso en que puede aparecer † debajo de un operador de mu_i es cuando tenemos un 1 debajo de $(\beta \vee \gamma)$ y no tenemos, sin embargo, valores determinados para β y γ. Nuestro procedimiento en este caso es el de construir tres diagramas sustitutos entre sí (alternatives) empezando cada uno de ellos con uno de los rectángulos mu_i (*i*), mu_i (*ii*), mu_i (*iii*). Estos rectángulos reproducen las fórmulas y los valores de mu_i, pero además se asigna 1 tanto a β como a γ en mu_i(*i*), 1 se asigna a β y 0 a γ en mu_i(*ii*), y 0 se asigna a β y 1 a γ en mu_i (*iii*). Estas asignaciones para β y γ en los sustitutos (alternatives) valen como asignaciones iniciales en ellos, y por tanto $\mathbf{mu_i}$ (i)′ es ($\mathbf{mu_i}' \vee \sim\beta \vee \sim\gamma$), $\mathbf{mu_i}$ (ii)′ es ($\mathbf{mu_i}' \vee \sim\beta \vee \gamma$) y $\mathbf{mu_i}$ (iii)′ es ($\mathbf{mu_i}' \vee \beta \vee \sim\gamma$). Ahora bien, un rectángulo que contenga un † se considera inconsistente si todos sus sustitutos (alternatives) son inconsistentes; así pues, lo que tenemos que demostrar aquí es que si la totalidad de $\mathbf{mu_i}$ (i)′, $\mathbf{mu_i}$ (ii)′ y $\mathbf{mu_i}$ (iii)′ son tesis de T también lo es $\mathbf{mu_i}'$.

LEMA 4

$$\vdash_T \mathbf{mu_i}\ \text{(i)}', \vdash_T \mathbf{mu_i}\ \text{(ii)}', \vdash_T \mathbf{mu_i}\ \text{(iii)} \rightarrow \vdash_T \mathbf{mu_i}'.$$

PRUEBA

Se le asigna 1 a $(\beta \vee \gamma)$ en mu_i; de aquí de acuerdo con el Lema 3:

$$(1)\ \vdash_T \sim(\beta \vee \gamma) \supset \mathbf{mu_i}'$$

Pero, como es fácil de comprobar, la siguiente es una fbf del CP válida, y por tanto una tesis de T:

$$(\sim(p \vee q) \supset r) \supset (((r \vee \sim p \vee \sim q) \cdot (r \vee \sim p \vee q) \cdot (r \vee p \vee \sim q)) \supset r)$$

De aquí mediante sustitución:

$$\vdash_T (\sim(\beta \vee \gamma) \supset \mathbf{mu_i}') \supset (((\mathbf{mu_i}' \vee \sim\beta \vee \sim\gamma) \cdot (\mathbf{mu_i}' \vee \sim\beta \vee \gamma) \cdot (\mathbf{mu_i}' \vee \beta \vee \sim\gamma)) \supset \mathbf{mu_i}')$$

es decir, $\vdash_T (\sim(\beta \vee \gamma) \supset \mathbf{mu_i}') \supset ((\mathbf{mu_i}\ \text{(i)}' \cdot \mathbf{mu_i}\ \text{(ii)}' \cdot \mathbf{mu_i}\ \text{(iii)}') \supset \mathbf{mu_i}')$

A partir de esto y de (1), de acuerdo con MP, obtenemos:

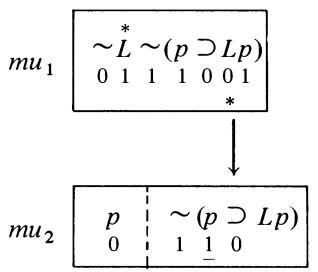
$$\vdash_T (\mathbf{mu_i}\ \text{(i)}' \cdot \mathbf{mu_i}\ \text{(ii)}' \cdot \mathbf{mu_i}\ \text{(iii)}') \supset \mathbf{mu_i}'$$

Mas, de acuerdo con la hipótesis del Lema, $\vdash_T \mathbf{mu_i}$ (i)', $\vdash_T \mathbf{mu_i}$ (ii)' y $\vdash_T \mathbf{mu_i}$ (iii)'. De aquí, de acuerdo con Adjunción y MP:

$$\vdash_T \mathbf{mu_i}' \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Hemos demostrado de este modo que siempre que una fbf, α, es válida-T podemos usar su diagrama-T para construir una prueba de α en el sistema axiomático T; es decir que T es completo. Las pruebas construidas mediante este método normalmente resultarán muy pesadas, pero la cuestión es que *pueden* construirse siempre.

Como muestra (tanto del método de convertir diagramas en pruebas deductivas como de la complejidad de las pruebas así conseguidas) tomemos la fórmula $M(p \supset Lp)$. Esta se convierte en $\sim L \sim(p \supset Lp)$ y puede ser probada como sigue:



Obtenemos una inconsistencia en mu_2 con lo que se demuestra que la fórmula es válida-T. Para construir una prueba de ello mediante el método acabado de describir procedemos como sigue:

$\mathbf{mu_1}'$ es $\sim L \sim(p \supset Lp)$

$\mathbf{mu_2}'$ es $\sim\sim(p \supset Lp) \vee p$

Ahora bien (i) mu_2 es explícitamente inconsistente, por tanto debemos demostrar mediante el método del Lema 1 que $\vdash_T \mathbf{mu_2}'$; y

(ii) mu_2 es accesible a mu_1, así pues (dado que $\vdash_T \mathbf{mu_2}'$) debemos demostrar mediante el método del Lema 2 que $\vdash_T \mathbf{mu_1}'$.

(i) La inconsistencia de mu_2 se origina a causa de que a p se le asigna allí a la vez 1 y 0; es decir, p es la β de la prueba del Lema 1. Tenemos, por tanto, que demostrar mediante el método del Lema 3 que $\vdash_T(\sim p \supset \mathbf{mu_2}')$ y que $\vdash_T(p \supset \mathbf{mu_2}')$. Ahora bien, a ninguna expresión que comience por L se le asigna un valor en mu_2[55] —es decir, ningún γ del Lema 3 aparece en mu_2— así pues, lo que tenemos que demostrar aquí es simplemente que $(\sim p \supset \mathbf{mu_2}')$ y $(p \supset \mathbf{mu_2}')$, es decir

$$(1) \quad \sim p \supset (\sim\sim(p \supset Lp) \vee p)$$

y

$$(2) \quad p \supset (\sim\sim(p \supset Lp) \vee p)$$

son válidas-CP. El que lo son puede demostrarse fácilmente aplicando tablas de verdad o algún otro método. (Al hacerlo así tratamos, por supuesto, a Lp como si no tuviera relación con p, es decir, como si fuera q). De aquí, puesto que toda

[55] *Podríamos* haber asignado un valor (0) a Lp, pero se origina la inconsistencia sin que tengamos que hacerlo.

fórmula válida-CP es un teorema de T, $\vdash_T (1)$ y $\vdash_T (2)$. De donde, de acuerdo con $(\sim p \supset q) \supset ((p \supset q) \supset q)$:

$$\vdash_T (\sim\sim(p \supset Lp) \vee p)$$

es decir

$$\vdash_T \mathbf{mu_2}'$$

(ii) Acabamos de demostrar que $\vdash_T (\sim\sim(p \supset Lp) \vee p)$. De aquí (siguiendo el método del Lema 2) obtenemos, de acuerdo con N:

$$\vdash_T L(\sim\sim(p \supset Lp) \vee p)$$

es decir, según Def $\supset$: $\vdash_T L(\sim(p \supset Lp) \supset p)$

de donde, según A6: $\vdash_T L \sim(p \supset Lp) \supset Lp$

es decir, según Def $\supset$: (3) $\vdash_T \sim L \sim(p \supset Lp) \vee Lp$

Ahora bien, mu_2 se construyó debido a que en mu_1 $L \sim(p \supset Lp)$ tenía asignado 1 y Lp tenía asignado 0. Y en mu_1 los γs del Lema 3 son $\sim(p \supset Lp)$ y p. Por ello debemos encontrarnos con que las siguientes fórmulas son válidas CP:

(4) $((L \sim(p \supset Lp) \supset \sim(p \supset Lp)) \cdot (Lp \supset p)) \supset (\sim L \sim(p \supset Lp) \supset \sim L \sim \sim(p \supset Lp))$

(5) $((L \sim(p \supset Lp) \supset \sim(p \supset Lp)) \cdot (Lp \supset p)) \supset (Lp \supset \sim L \sim(p \supset Lp))$

También esto puede ser comprobado mediante las pruebas (tests) CP habituales. ((4) es válida porque su consecuente es una muestra de sustitución de $p \supset p$. (5) es una muestra de sustitución de

$$\begin{array}{cccccccccccccc} ((p & \supset & \sim(q & \supset & r)) & \cdot & (r & \supset & q)) & \supset & (r & \supset & \sim p) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \underline{0} & 1 & & 1 & & 0 & \underline{1} & 0 & 0\,1 \end{array}$$

(hemos anotado los valores que demuestran la validez de acuerdo con la prueba de Reducción).)

(4) y (5) son, por tanto, tesis de T. De aquí de acuerdo con A5, Adjunción y MP tenemos:

$$\vdash_T \sim L \sim(p \supset Lp) \supset \sim L \sim(p \supset Lp)$$

y $\vdash_T Lp \supset \sim L \sim(p \supset Lp)$

de donde de acuerdo con CP y (3):

$$\vdash_T \sim L \sim(p \supset Lp) \qquad [\mathbf{mu_1}']$$

es decir

$$\vdash_T M(p \supset Lp) \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Se comprenderá que si se desarrollase todo esto como una prueba en T sería por supuesto una prueba muy extensa, incluso aun no teniendo en este caso operadores-† que tomar en consideración. Sin embargo, sería una legítima derivación a partir de los axiomas de T; y el resultado de completitud (completeness) nos asegura que una prueba de este tipo podría, en teoría, construirse siempre para cualquier fórmula válida-T.

Ejercicios 5

5.1. Usando los diagramas dados en las págs. 84 y 86 constrúyanse modelos-T que hagan falsos los ejemplos [4] y [5].

5.2. Demostrar que $\vdash \alpha \supset L\,(\beta \supset \gamma) \rightarrow \vdash \beta \supset L\,(\alpha \supset \gamma)$ no es preservadora de validez en T. (*Recomendación*: utilícesele para derivar una fórmula que pueda demostrarse que no es válida-T).

5.3. Pruébese la validez en T de:

(a) $M\,(Mp \cdot \sim q) \vee L\,(p \supset Lq)$

(b) $(M\,(p \cdot q) \vee M\,(p \cdot r)) \supset Mp$

(c) $L\,(p \equiv q) \supset (Lp \equiv Lq)$

(d) $L\,(p \equiv q) \supset L\,(Lp \equiv Lq)$

5.4. Constrúyanse modelos-T falsificadores para las fórmulas no válidas del ejercicio anterior.

5.5. Siendo mu_j accesible a mu_i pruébese en T: $L\,\mathbf{mu_j}' \supset \mathbf{mu_i}'$.

5.6. Siendo mu_i (*i*) y mu_i (*ii*) y mu_i (*iii*) los sustitutos (alternatives) de mu_i pruébese en T:

$$\mathbf{mu_i}' \equiv (\mathbf{mu_i}\ \mathbf{(i)}' \vee \mathbf{mu_i}\ \mathbf{(ii)}' \vee \mathbf{mu_i}\ \mathbf{(iii)}')$$

CAPITULO VI

S4 Y S5: PROCEDIMIENTOS DE DECISION Y COMPLETITUD

Diagrama-S4[56]

Describiremos ahora un procedimiento de decisión para S4 basado, igual que el que hemos dado para T, en diagramas semánticos. El lector ha de suponer que contamos con todas las reglas del método de diagramas-T, excepto cuando especifiquemos lo contrario.

La única diferencia entre nuestras definiciones de validez-T y validez-S4 radica en que en un modelo-S4 la relación R debe ser transitiva. Ahora bien, R es la relación que se mantiene entre dos mundos mu_i y mu_j cuando mu_j es accesible a mu_i. Así pues, el requisito de que R sea transitiva puede ser expresado como el requisito de que en mundos cualesquiera, mu_i, mu_j y mu_k, si mu_j es accesible a mu_i y mu_k es accesible a mu_j, entonces mu_k es accesible a mu_i.

Apliquemos esto a los diagramas. Diremos que en un diagrama semántico una serie de rectángulos mu_i, ..., mu_n forman una *cadena* si una flecha va desde cada uno de ellos (excepto el último) al próximo rectángulo de la serie. De este modo en el diagrama de la pág. 84, mu_1, mu_2, mu_5 forman una cadena, al igual que mu_1, mu_2, mu_6, y así sucesivamente. A fin de tener en cuenta el requisito de la transitividad, un diagrama-S4 se diferenciará de un diagrama-T en lo siguiente: una flecha debe partir de cada rectángulo hasta cada uno de los restantes rectángulos que aparezcan posteriormente en cada cadena al que el primero pertenezca. Esto significa que para satisfacer las reglas A y B, siempre que en un rectángulo tengamos $L\,\alpha = 1$ (o $M\,\beta = 0$) debemos ahora escribir α con un 1 debajo (o β con un 0 debajo), no sólo en el rectángulo siguiente de la cadena sino en todos los demás siguientes también. Cuando un rectángulo, mu_j, contenga un † entonces todos los sustitutos (alternatives) de mu_j se consideran pertenecientes a la cadena a la que mu_j pertenezca; de este modo si una flecha va de un rectángulo, mu_i a mu_j, deben dibujarse flechas de mu_i a mu_j (*i*), mu_j (*ii*) y mu_j (*iii*).

Evidentemente, el requisito de transitividad no supondrá diferencia alguna en el caso de un diagrama cuya cadena no tiene más de dos rectángulos de longitud. Por tanto, puesto que el diagrama-T para una fórmula de primer grado modal nunca contiene cadenas con más de dos rectángulos de longitud, obtenemos la conclusión de que una fórmula de primer grado es válida-S4 SI es válida-T.

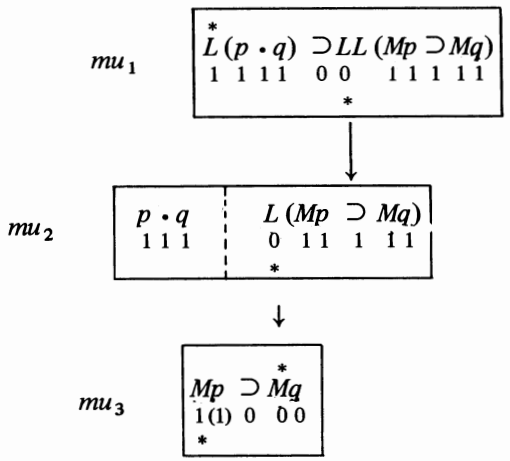
Cuando, por el contrario, el diagrama-T de una fórmula contiene alguna cadena más larga que ésta existirá una diferencia entre su diagrama-T y su diagrama-S4. Considérese por ejemplo la fórmula:

$$(1)\ L\,(p \cdot q) \supset LL\,(Mp \supset Mq)$$

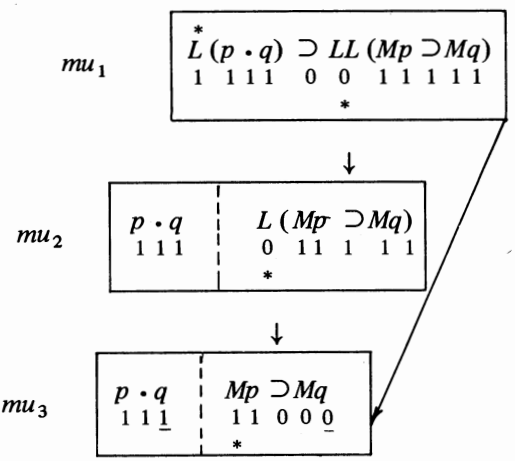
---

[56] Nuestro procedimiento es nuevamente análogo al método de cuadros semánticos (cf. nota al pie, número 48). Otros procedimientos de decisión para S4 aparecen en Von Wright [1951], Anderson [1954] (modificados en Hanson [1966]), Ohnishi and Matsumoto [1957].

Su diagrama-T es



Pero su diagrama-S4 es:



Aquí la asignación del valor 1 a $L(p \cdot q)$ en mu_1 requiere la presencia de $p \cdot q$ (= 1) no simplemente en mu_2 sino en mu_3 también. Esta clase de añadidura a los contenidos de los rectángulos, crea, por supuesto, nuevas posibilidades de inconsistencias originadas en los diagramas. Cuando nos encontramos con una inconsistencia en el diagrama-S4 de una fórmula pero no en su diagrama-T, esa fórmula es válida-S4 pero no es válida-T. (1) es, en realidad, uno de estos casos, como muestran los diagramas.

A fin de demostrar que el método de los diagramas semánticos nos proporciona un procedimiento de decisión para S4 tenemos que demostrar que para toda fbf puede construirse un diagrama-S4[57] de extensión finita; o más exactamente, que

[57] O un sistema completo de diagramas S4; pero para mayor simplicidad omitimos aquí la referencia a alternativas, ya que no pueden afectar a la finitud del procedimiento por la misma razón que dimos en el caso de T en la pág. 87.

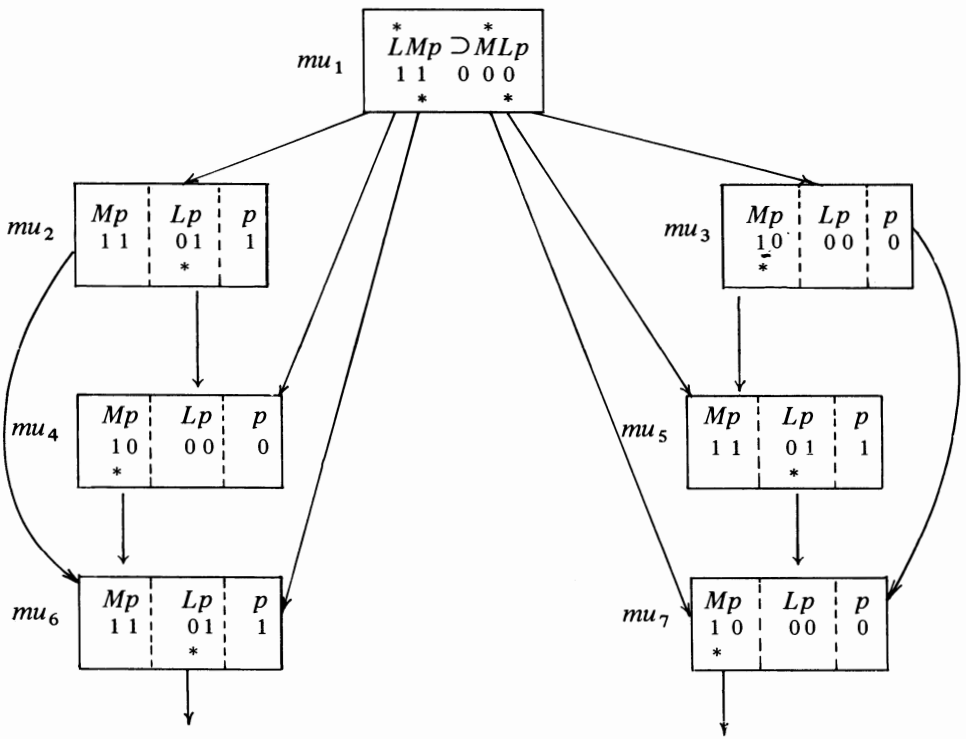
para toda fbf, α, podemos construir un diagrama-S4 el cual, en un número finito de pasos o bien (a) demostrará que α es válida (al contener una inconsistencia en algún rectángulo) o bien (b) nos permitirá construir un modelo-S4 falsificador para α.

Ahora bien, es fácil demostrar que todo diagrama-T es finito, ya que en toda cadena de un diagrama-T el grado modal de los rectángulos está disminuyendo constantemente. Por ello, en el peor de los casos, cada cadena debe llevarnos a un rectángulo que contenga solamente fórmulas CP, y tales fórmulas nunca generan nuevos rectángulos.

Esto no es válido, sin embargo, para los diagramas-S4, ya que en un diagrama-S4 si un rectángulo, mu_1, contiene, pongamos por caso, la asignación 1 para $L\beta$ entonces aparecerá β en todos los rectángulos del diagrama; por tanto si β es de grado modal n todos los rectángulos contendrán al menos una fórmula de grado modal n. Así, pues, no disponemos de la misma sencilla prueba de que disponíamos para T, para demostrar que todo diagrama-S4 es finito. De hecho, en S4 puede originarse la irritante situación siguiente: Considérese la fórmula:

$$(2)\ LMp \supset MLp$$

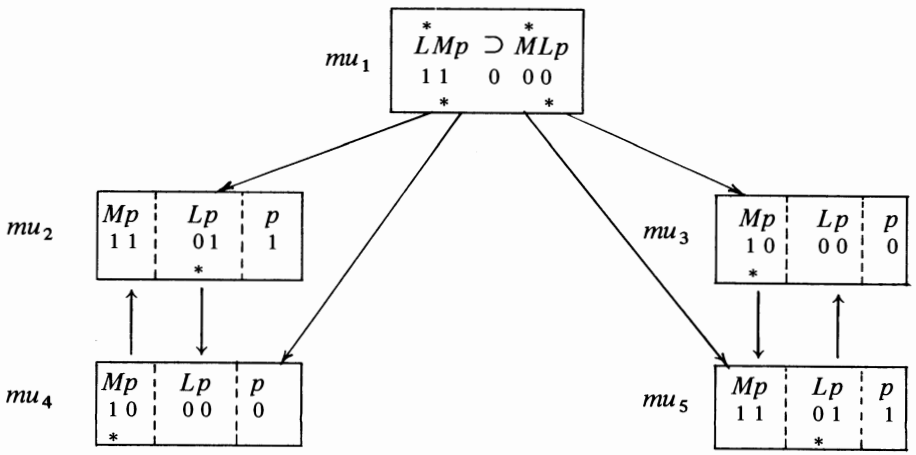
Esta no es válida-S4[58]; pero su diagrama-S4 (de acuerdo con nuestras presentes reglas) se desarrolla de este modo:



[58] Quizá la forma más fácil de convencerse uno de esto es observar que mediante las leyes de reducción de S5, (2) es equivalente *en S5* a $Mp \supset Lp$, que evidentemente no es válida-S5. Por tanto (2) no es válida-S5, y si una fórmula no es válida-S5 no puede ser válida-S4 tampoco.

Aquí se necesita el rectángulo mu_6 a causa del asterisco en mu_4. Pero hay una flecha que va de mu_1 a mu_6 a la vez que de mu_4 a mu_6 y como resultado de ello el contenido de mu_6 resulta idéntico al contenido de mu_2; de aquí que necesitemos un rectángulo más todavía debajo de mu_6, cuyo contenido resultará igual al de mu_4, y así sucesivamente hasta el infinito. Y la misma situación se origina también en la parte derecha del diagrama. De este modo, siempre parece que vamos a tropezarnos con un modelo falsificador para 2 en el paso siguiente, pero una vez que damos ese paso parece que hay todavía otro más que dar. Sin embargo tampoco nos encontramos con ninguna inconsistencia en el diagrama[59].

Evidentemente este diagrama no nos da una decisión para (2). Una simple modificación en él, sin embargo, nos la dará: suprimimos el rectángulo mu_6 por completo y volvemos hacia arriba, hacia mu_2, la flecha que salía de mu_4 a mu_6; procedemos del mismo modo en la otra parte del diagrama. Tenemos entonces un modelo de cinco mundos falsificador para (2) como podemos comprobar fácilmente mediante una tabla de verdad. El diagrama será éste:



Que este diagrama cumple las condiciones que anteriormente parecían llevarnos a un diagrama infinito puede verse en lo siguiente:

1. Necesitábamos un mundo mu_6 (accesible a mu_4) en el primer diagrama a fin de que los valores iniciales fuesen asignados consistentemente a las fórmulas de mu_4. Puesto que las fórmulas de mu_2 y los valores a ellas asignados son exactamente los mismos que los de mu_6, resulta igualmente satisfactorio el hacer mu_2 accesible a mu_4.

2. Las condiciones para la asignación de los valores iniciales de mu_6 eran las de que éste a su vez fuese sucedido por un nuevo mundo en el que se obtuviesen determinadas asignaciones de valor. Mas, puesto que mu_6 es idéntico a mu_2, éstas son precisamente las condiciones para las asignaciones de valores iniciales en mu_2, y ya nos hemos ocupado de que se cumplan al hacer mu_4 accesible a mu_2.

59 Adaptando una expresión de Kripke [1963a] (pág. 71) podríamos denominar a los diagramas construidos de acuerdo con nuestras presentes reglas, diagramas "árbol". De este modo $LMp \supset MLp$ no puede ser hecha falsa en un diagrama árbol finito en S4. En T, sin embargo, toda fórmula no válida puede ser hecha falsa en un diagrama árbol finito.

Resumiendo, en lugar de la cadena sin fin, $mu_1, mu_2, mu_4, mu_6, \ldots$, tenemos mu_1 seguido de mu_2 y mu_4, en combinaciones ilimitadas; y para esto sólo necesitamos tres mundos. Exactamente las mismas consideraciones son válidas para la parte derecha del diagrama[60].

Demostramos ahora cómo generalizar este procedimiento para evitar los diagramas infinitos en todos los casos.

Observamos en primer lugar que aunque en el ejemplo anterior el contenido de mu_2 era exactamente igual al de mu_6 no habría importado el que mu_2 hubiera tenido alguna fórmula más también. En tanto en cuanto todas las fórmulas de mu_6 hubieran aparecido en mu_2 (teniendo asignados los mismos valores), habría sido igualmente satisfactorio dirigir la flecha hacia atrás, de mu_4 a mu_2, ya que todas las condiciones para la asignación consistente de los valores requeridos en mu_6 estarían incluidas en la asignación de los valores de mu_2, y por hipótesis éstas son cumplidas por los sucesores de mu_2 en la cadena. Cuando todas las fórmulas que aparecen en un rectángulo mu_j aparezcan también en un rectángulo mu_i teniendo los mismos valores asignados diremos que mu_i está contenido en mu_i.

Otra cuestión a tener en cuenta es que la distancia entre mu_2 y mu_6 en la cadena (el número de rectángulos que intervenían) era irrelevante. Incluso aunque mu_6 hubiera aparecido mucho más posteriormente en la cadena de lo que lo hizo habríamos podido con igual propiedad haber dirigido la flecha a partir de su predecesor hacia atrás, hacia mu_2, siempre que, desde luego, dirigiéramos al mismo tiempo hacia mu_2 todas las flechas que habrían ido a parar a mu_6.

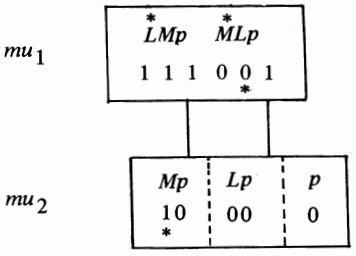
Establecemos ahora la siguiente regla adicional para los diagramas-S4.

Regla de las cadenas repetidoras (repeating chains)

Siempre que en una cadena cualquiera de un diagrama-S4 un rectángulo, mu_j esté contenido en un rectángulo, mu_i, que aparezca *con anterioridad* en esa cadena, suprimimos mu_j y dirigimos todas las flechas que habrían ido a mu_j a mu_i en su lugar.

---

60 En el caso de nuestro presente ejemplo podemos de hecho hacer algo mejor. Puesto que mu_3 y mu_4 son idénticos, y mu_2 y mu_5 lo son también, podríamos abandonar por completo mu_4 y mu_5 y en lugar de ellos trazar flechas de mu_2 a mu_3 y de mu_3 a mu_2. Entonces obtenemos un modelo de tres mundos falsificador para (2). Por supuesto, utilizando valores "opcionales" en mu_1 podemos hacer algo mejor todavía y producir el siguiente diagrama que proporciona un modelo falsificador de dos mundos:



(Obsérvese que éste, como se verá más adelante, es un diagrama S5 además de ser un diagrama S4, y muestra que (2) no es válida en S5 tampoco, no sólo en S4). Pero estas posibilidades dependen de características especiales de (2) y no podemos generalizar a partir de ellas.

Denominaremos a una cadena a la que hayamos aplicado esta regla, cadena *repetidora*.

La observación de la regla de las cadenas repetidoras nos garantizará el que todas las cadenas de un diagrama-S4 sean de extensión finita, y por tanto que todos los diagramas contengan únicamente un número finito de rectángulos por la siguiente razón: es evidente de acuerdo con las reglas de construcción de diagramas que en el diagrama para una fbf, toda fórmula que aparezca en cualquier rectángulo debe ser una parte bien-formada de la propia α. Ahora bien, α tiene únicamente un número finito de partes bien-formadas y por tanto sólo puede existir un número finito de conjuntos de fórmulas seleccionadas de éstas, y, por supuesto, sólo un número finito de modos de asignar valores a las fórmulas de cualquiera de tales conjuntos. Así, pues, aunque los contenidos de los rectángulos de una cadena pueden ser muy variados, sin embargo, no pueden variar *indefinidamente*; por tanto en una cadena infinita debemos tropezarnos tarde o temprano con un rectángulo que ya está contenido en un rectángulo anterior, y al que, por tanto, podemos aplicar la regla de las cadenas repetidoras. Por supuesto una vez que hayamos hecho esto la cadena contendrá únicamente un número finito de rectángulos.

Todas las cadenas de un diagrama-S4 son, entonces, finitas. Ahora bien, un diagrama-S4 consta de un conjunto de cadenas cada una de las cuales comienza por mu_1. Cada rectángulo (a excepción de mu_1) se genera, de acuerdo con las reglas C y D de la pág. 81, mediante un operador modal debajo del cual aparezca un asterisco en el rectángulo inmediatamente anterior de la cadena; y puesto que todos los rectángulos sólo contienen un número finito de operadores modales, sólo puede existir un número finito de cadenas en cualquier diagrama-S4. De aquí que todo diagrama-S4 contenga un número finito de rectángulos. La presencia de operadores-† y la consiguiente construcción de sustitutos (alternatives) no altera esta conclusión, por la misma razón que en el caso de T.

La otra modificación que tenemos que hacer en el método de los diagramas-T se refiere a la definición de un rectángulo inconsistente. Decíamos en la pág. 88 que cualquier rectángulo al que fuese accesible un rectángulo inconsistente era él, a su vez, inconsistente. En un diagrama-T esto significa que un rectángulo es inconsistente si un rectángulo que esté inmediatamente por debajo de él (es decir, unido mediante una flecha) es inconsistente. Mas, en un diagrama-S4, por supuesto, las flechas van no sólo a los rectángulos que están inmediatamente debajo, sino también a los que están debajo de éstos, y así sucesivamente; y, por supuesto, también van las flechas a los sustitutos (alternatives) (lo cual no ocurre en un diagrama-T). Por lo tanto podemos sustituir la cláusula 2 de la definición de rectángulo inconsistente de la pág. 88, por:

2′. Cualquier rectángulo que sea el precesor inmediato de un rectángulo inconsistente es un rectángulo inconsistente.

Definimos el *precesor inmediato* como sigue: Si se requiere, de acuerdo con la regla C o la regla D (pág. 81) la construcción de un rectángulo, mu_j, accesible a, pero distinto que, mu_i, a fin de satisfacer las asignaciones de valor de mu_i, entonces mu_i es el precesor inmediato de mu_j. (Obsérvese que en un diagrama-T construido sin reducciones, siempre que mu_j es accesible a mu_i, mu_i es el precesor inmediato de mu_j; pero, por supuesto, esto no es válido para los diagramas-S4).

Una fbf será válida-S4 SI el primer rectángulo de su sistema completo de rectángulos-S4, mu_1, es inconsistente.

La completitud (completeness) de S4

Para probar la completitud de S4 tenemos que demostrar que toda fbf que sea válida-S4 es una tesis del sistema axiomático S4. Nuestra prueba será de acuerdo con el modelo general de la prueba de completitud que dimos para T en el capítulo anterior. Al igual que allí hicimos, antes de nada consideraremos únicamente los casos en los que no aparezcan operadores-†. Y aquí también supondremos que M ha sido sustituida siempre por $\sim L \sim$. Todos los rectángulos contendrán entonces solamente una fórmula, γ, a la que inicialmente se asigna 0, y un conjunto de fórmulas, β_1, ..., β_k ($k \geqslant 0$), a cada una de las cuales inicialmente se asigna 1 (cf. pág. 89).

Al probar la completitud de T definimos para cada rectángulo, mu_j, una fórmula $\mathbf{mu_j}'$, que era:

$$\sim\beta_1 \vee \ldots \vee \sim\beta_k \vee \gamma$$

y demostramos (i) que si mu_j es explícitamente inconsistente, entonces $\vdash_T \mathbf{mu_j}'$ y (ii) que si mu_j es accesible a mu_i, entonces $\vdash_T \mathbf{mu_j}' \rightarrow \vdash_T \mathbf{mu_i}'$ (Lemas 1 y 2 pág. 89). Para demostrar la completitud de S4 definimos, para cada rectángulo, mu_j, de un diagrama-S4 una fórmula $\mathbf{mu_j}''$, que es

$$\sim L\,\beta_1 \vee \ldots \vee \sim L\,\beta_k \vee \gamma$$

siendo β_1, ..., β_k y γ igual que antes; y ahora establecemos dos lemas semejantes para S4:

LEMA 5

Si cualquier rectángulo, mu_j, es explícitamente inconsistente, entonces $\vdash_{S4} \mathbf{mu_j}''$.

LEMA 6

Si cualquier rectángulo, mu_i, es el precesor inmediato de un rectángulo, mu_j, entonces si $\vdash_{S4} \mathbf{mu_j}''$, $\vdash_{S4} \mathbf{mu_i}''$.

Puesto que mu_1 puede obtenerse siempre a partir de mu_j en un número finito de pasos, se seguirá de estos dos lemas que si cualquier rectángulo de un diagrama-S4 es explícitamente inconsistente, entonces $\vdash_{S4} \mathbf{mu_1}''$; y puesto que α es la y tiene asignado 0 allí, $\mathbf{mu_1}''$ es la propia α.

Como paso previo a la prueba de los Lemas 5 y 6 establecemos primero el

LEMA 7

Para cualquier rectángulo, mu_j, $\vdash_{S4} \mathbf{mu_j}' \mathbf{mu_j}''$

La prueba se hace de acuerdo con $\sim Lp$ (un simple derivado de A5) y CP.

Observamos también que los Lemas 1 y 3 (págs.89 y 90)son válidos para S4 –es decir, son válidos cuando en lugar de "$\vdash_T$" tenemos "$\vdash_{S4}$"– puesto que sus pruebas dependen únicamente de aspectos que los diagramas-T y los diagramas-S4 tienen en común, y todas las tesis de T son también tesis de S4[60a].

Puede considerarse ahora que el Lema 5 es una consecuencia inmediata de los

60a El Lema 2, sin embargo, no es válido en S4. Su demostración presupone que siempre que se asigne 1 inicialmente a β en mu_j, se le asigna 1 a $L\,\beta$ en el precesor inmediato de mu_j, a saber, mu_i; y esto no ocurre así necesariamente en un diagrama S4, ya que, de acuerdo con el requisito de la transitividad, β puede estar en mu_j porque a $L\,\beta$ se le asigna 1 en algún precesor de mu_i, aunque no en el propio mu_i. Es este hecho el que hace más difícil el demostrar un lema correspondiente para S4, y que nos obliga a formular un lema tal (a saber el Lema 6) en términos de un tipo de fórmula ($\mathbf{mu_j}''$) más complicado que el tipo ($\mathbf{mu_j}'$) que era suficiente para la prueba de completitud de T.

Lemas 1 y 7 de acuerdo con MP. El Lema 6 requerirá, desde luego, una prueba más complicada.

PRUEBA DEL LEMA 6

De las fórmulas colocadas en mu_j y a las que inicialmente se asignó valores allí, a una (a saber γ) se le asignará 0 en mu_j ya que a $L\,\gamma$ se le asigna 0 (inicialmente o consiguientemente) en mu_i, y a algunas otras, pongamos por caso $\beta_1, ..., \beta_h$ ($k \geqslant h \geqslant 0$) se les asignará 1 en mu_j ya que a $L\,\beta_1, ..., L\,\beta_h$ se les asigna 1 (inicialmente o consiguientemente) en mu_i. Por tanto, de acuerdo con el Lema 3, igual que en la pág. 92.

$$\vdash_{S4} (\sim L\,\beta_1 \vee ... \vee \sim L\,\beta_h \vee L\,\gamma) \supset \mathbf{mu_i}'$$

y por tanto de acuerdo con el Lema 7 y Sil.:

(1) $\quad \vdash_{S4} (\sim L\,\beta_1 \vee ... \vee \sim L\,\beta_h \vee L\,\gamma) \supset \mathbf{mu_i}''$

Cualquier otra fórmula de mu_j será alguna fórmula $\beta_{h+1}, ..., \beta_k$, a cada una de las cuales se le asigna 1 en mu_j ya que $L\,\beta_{h+1}, ..., L\,\beta_k$ tienen asignado 1 en algún rectángulo que es posterior en la cadena a mu_i. En este caso, de acuerdo con la Regla A (pág. 81), $\beta_{h+1}, ..., \beta_k$ tendrán todas ellas asignado 1 inicialmente, en mu_i (así como en mu_j) y por tanto $\sim L\,\beta_{h+1}, ..., \sim L\,\beta_k$ estará entre los disyuntos (disjuncts) de $\mathbf{mu_i}''$. Por tanto de acuerdo con $p \supset (p \vee q)$:

(2) $\quad \vdash_{S4} (\sim L\,\beta_{h+1} \vee ... \vee \sim L\,\beta_k) \supset \mathbf{mu_i}''$

A partir de (1) y (2) obtenemos (de acuerdo con CP):

$$\vdash_{S4} (L\,\beta_1 \vee ... \vee \sim L\beta_h \vee \sim L\,\beta_{h+1} \vee ... \vee \sim L\,\beta_k \vee L\,\gamma) \supset \mathbf{mu_i}''$$

es decir (3) $\vdash_{S4} (\sim L\,\beta_1 \vee ... \vee \sim L\,\beta_k \vee L\,\gamma) \supset \mathbf{mu_i}''$

Ahora bien, por hipótesis, $\vdash_{S4} \mathbf{mu_j}''$, es decir

$$\vdash_{S4} (\sim L\beta_1 \vee ... \sim L\,\beta_k \vee \gamma)$$

A partir de esto, de acuerdo con N, Def $\supset$ y A6, al igual que en la pág. 91 tenemos:

$$\vdash_{S4} (\sim LL\,\beta_1 \vee ... \vee \sim LL\,\beta_k \vee L\gamma)$$

de donde, de acuerdo con R4 ($Lp \equiv LLp$):

$$\vdash_{S4} (\sim L\,\beta_1 \vee ... \vee \sim L\,\beta_k \vee L\,\gamma)$$

de donde, de acuerdo con (3) y MP:

$$\vdash_{S4} \mathbf{mu_i}''$$

Tenemos que ocuparnos finalmente de los operadores-†. Siempre que $mu_i, mu_i(i)$, mu_i (ii) y mu_i (iii) sean como en las págs. 92 y 93, definimos $\mathbf{mu_i}$ **(i)**$''$, $\mathbf{mu_i}$ **(ii)**$''$ y $\mathbf{mu_i}$ **(iii)**$''$ respectivamente como ($\mathbf{mu_i}''$ $\vee$ $\sim\beta\vee\sim\gamma$), ($\mathbf{mu_i}''$ $\vee$ $\sim\beta\vee\gamma$) y ($\mathbf{mu_i}''$ $\vee$ $\beta\vee\sim\gamma$). Simples modificaciones de las pruebas mostrarán que los Lemas 5 y 6 también son válidos para estas definiciones. Queda por demostrar un análogo del Lema 4 (pág. 92) a saber

$$\vdash_{S4} \mathbf{mu_i}\,\textbf{(i)}'', \quad \vdash_{S4} \mathbf{mu_i}\,\textbf{(ii)}'', \quad \vdash_{S4} \mathbf{mu_i}\,\textbf{(iii)}'' \rightarrow \vdash_{S4} \mathbf{mu_i}''$$

La prueba de esto es la misma que la del Lema 4 excepto en que

(a) sustituimos la fórmula (1) por

$$\vdash_{S4} \sim(\beta \vee \gamma) \supset \mathbf{mu_i}''$$

que es una simple consecuencia de (1) y el Lema 7, y

(b) en el resto de la prueba sustituimos siempre $\mathbf{mu_i}'$ por $\mathbf{mu_i}''$, y consiguientemente $\mathbf{mu_i}$ (i)', $\mathbf{mu_i}$ (ii)' y $\mathbf{mu_i}$ (iii)' por $\mathbf{mu_i}$ (i)'', $\mathbf{mu_i}$ (ii)'' y $\mathbf{mu_i}$ (iii)'', respectivamente.

Podemos por tanto, como en el caso de T, utilizar el diagrama-S4 de cualquier fórmula válida-S4 para construir una prueba de aquella fórmula en el sistema axiomático S4.

Diagramas-S5

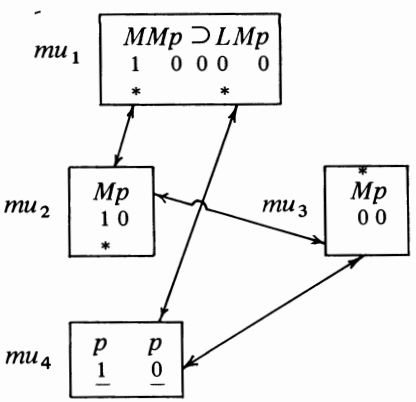
El método de los diagramas puede ampliarse de modo que nos proporcione un Procedimiento de Decisión para S5. En un modelo-S5 todo mundo está en la relación R con todos los otros mundos[61]. La nueva regla que ha de ser observada en la construcción de un diagrama-S5 es, por tanto, la de que una flecha debe salir desde cada rectángulo a todos los demás. Esto significa que siempre que añadamos un nuevo rectángulo, al construir un diagrama-S5, debemos dibujar una flecha que vaya de él a todos los rectángulos que ya figuran en el diagrama, así como también que vaya de todos los demás rectángulos a él, e introducir en estos rectángulos cualquier fórmula que las nuevas flechas exijan. De este modo se incrementan las posibilidades de originarse inconsistencias en los rectángulos– como, por supuesto, era de esperar, ya que una fórmula puede ser válida-S5 sin que sea válida-S4.

Como ilustración de esto consideremos la siguiente fórmula (están indicados los valores inmediatos):

$$\begin{array}{ccc} MMp & \supset & LMp \\ 1 & & 0\ 0 \end{array}$$

Damos más adelante el diagrama-S5. Por razones de mayor simplicidad las flechas que van de mu_1 a mu_2 y de mu_2 a mu_1, respectivamente, las indicamos por medio de una sola flecha con dos extremos indicadores, y de modo análogo en los demás casos.

Aquí se precisan los rectángulos mu_2 (con $Mp = 1$) y mu_3 (con $Mp = 0$) de acuerdo con los asteriscos de mu_1 según las reglas de los diagramas-T. Pero las flechas S5 de mu_3 a mu_1 y mu_2 hacen que a p se le asigne 0 en cada uno de éstos, dando



61 Alternativamente, R debe ser simétrica además de transitiva y reflexiva, pero ya hemos mostrado (nota número 39) la coincidencia entre esta condición y la establecida en el texto.

como resultado que no podamos dar a p el valor 1 en mu_2 sino que precisemos otro rectángulo mu_4 en el que p tenga el valor 1. Sin embargo, debe haber una flecha que vaya también de mu_3 a mu_4, y el asterisco por encima de la M en mu_3 da a p el valor 0 en mu_4, y por lo tanto tenemos ahí una inconsistencia. De aquí que la fórmula de mu_1 sea válida-S5.

También podría establecerse una prueba de completitud para S5 basada en diagramas semánticos, análogos a los que hemos dado para T y S4[62]. Sin embargo, en el caso de S5, también se puede dar una prueba de completitud basada en la reducción a forma normal conjuntiva modal (FNCM) y esto es lo que haremos en vez de lo primero. Para hacerlo, primero tenemos que demostrar cómo la reducción a FNCM proporciona un procedimiento de decisión para S5.

Otro procedimiento de decisión (an alternative d. p.) para S5[63]

La validez-S5 de una fbf, α, puede probarse mediante el siguiente método:

1. Redúzcase α a una fbf, α', en FNCM de acuerdo con el método explicado en la pág. 57.

2. Dentro de cada término de la conjunción (conjunct), C_i, en α', dispónganse los disyuntos (disjuncts) del siguiente modo: primero, todos los disyuntos no modalizados (las fórmulas CP); a continuación todos los disyuntos que comiencen por L; finalmente todos los disyuntos que comiencen por M. Puesto que una disyunción CP es ella misma una fórmula CP, cada C_i tendrá ahora la forma:

$$\beta \vee L\gamma_1 \vee \ldots \vee L\gamma_n \vee M\delta_1 \vee \ldots \vee M\delta_m$$

siendo, β, γ_1, ..., γ_n, ..., δ_1, ..., δ_m, todas ellas fórmulas CP, $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, y pudiera no haber ningún disyunto no modalizado β.

3. Utilícese la ley de distribución-M para sustituir $M\delta_1 \vee \ldots \vee M\delta_m$ por $M(\delta_1 \vee \ldots \vee \delta_m)$. Puesto que $\delta_1, \ldots, \delta_m$, son todas ellas fórmulas CP, su disyunción es una fórmula CP, y podemos designarla simplemente como α. Cada C_i es por tanto ahora de la forma:

$$\beta \vee L\gamma_1 \vee \ldots \vee L\gamma_n \vee M\delta$$

(Cuando todos los C_i estén en esta forma diremos que la fórmula está en la FNCM *ordenada*).

4. Pruébense todos los C_i mediante la siguiente regla: Fórmense $n+1$ disyunciones, cada una de las cuales tenga a δ como un disyunto y uno distinto de $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ como el otro disyunto, es decir, fórmense las fórmulas CP $n+1$ $(\beta \vee \delta), (\gamma_1 \vee \delta), \ldots, (\gamma_n \vee \delta)$[64]. SI al menos una de éstas es válida-CP, C_i es válido-S5.

5. SI todos los C_i de α' son válidos-S5, α es válida-S5.

Como ejemplos considérense las dos fórmulas que redujimos a FNCM en la pág. 58. En FNCM son:

EJEMPLO 1

$$(Mp \vee L \sim p \vee Lp) \cdot (M \sim p \vee L \sim p \vee Lp)$$

Esta será válida si todos los miembros de la conjunción (each conjunct) lo son.

---

62 Para una prueba tal *vide*, por ejemplo, Kripke [1963a].

63 El procedimiento de decisión descrito aquí se debe esencialmente a Carnap [1946]. Un método ligeramente más elaborado se encuentra en Wajsberg [1933].

64 Por supuesto si C_i no contiene ningún disyunto no modalizado, β, sólo habrá que considerar las n disyunciones $(\gamma_1 \vee \delta), \ldots, (\gamma_n \vee \delta)$; y si no hay ningún δ simplemente comprobamos $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Considérese el primer término de la conjunción, $Mp \vee L \sim p \vee Lp$. De acuerdo con el paso 2 éste se convierte en $L \sim p \vee Lp \vee Mp$ (El paso 3 es inaplicable). Aquí no contamos con ningún β (porque todos los disyuntos están modalizados). γ_1 es $\sim p$, γ_2 es p y δ es p. Ahora bien, este término de la conjunción será válido SI o bien $(\gamma_1 \vee \delta)$ o bien $(\gamma_2 \vee \delta)$ son válidos CP; es decir o bien $\sim p \vee p$ o $p \vee p$ son válidos CP. Y $\sim p \vee p$ es válido CP, por tanto todo el término de la conjunción es válido.

El segundo término de la conjunción se convierte en $L \sim p \vee Lp \vee M \sim p$ que será válido SI o bien $\sim p \vee \sim p$ ó $p \vee \sim p$ son válidos. Y $p \vee \sim p$ es válido.

De este modo ambos términos de la conjunción son válidos y por tanto la fórmula completa es válida. Por consiguiente la fórmula original es válida también (ya que cualquier fórmula es equivalente en S5 a su FNCM).

EJEMPLO 2

$$(Mp \vee M(p \cdot \sim q) \vee L(\sim p \vee q) \vee Mr) \cdot (L \sim r \vee M(p \cdot \sim q) \vee L(\sim p \vee q) \vee Mr)$$

Mediante los pasos 2 y 3 esto se convierte en:

$$(L(\sim p \vee q) \vee M(p \vee (p \cdot \sim q) \vee r)) \cdot (L \sim r \vee L(\sim p \vee q) \vee M((p \cdot \sim q) \vee r))$$

El primer término de la conjunción será valido SI $(\sim p \vee q) \vee (p \vee (p \cdot \sim q) \vee r)$ es válido (que lo es); el segundo será válido SI o bien $\sim r \vee ((p \cdot \sim q) \vee r)$ o $(\sim p \vee q) \vee ((p \cdot \sim q) \vee r)$ son válidos, y de hecho ambos son válidos. Así pues, una vez más la fórmula original es válida.

Ninguno de estos ejemplos tiene fórmula no modalizada alguna; pero el siguiente (supuesto que ya se le ha reducido a FNCM) sí tiene:

EJEMPLO 3

$$(Lq \vee M \sim p \vee r \vee L \sim (p \cdot r) \vee ((p \cdot q) \supset r)) \cdot (Mp \vee L \sim p)$$

Mediante el paso 2 (el paso 3 es inaplicable) el primer término de la conjunción se convierte en:

$$(r \vee ((p \cdot q) \supset r)) \vee Lq \vee L \sim (p \cdot r) \vee M \sim p$$

Aquí β es $(r \vee ((p \cdot q) \supset r))$, γ_1 es q, γ_2 es $\sim(p \cdot r)$ y δ es $\sim p$.

Este término de la conjunción será válido SI uno de $(\beta \vee \delta)$, $(\gamma_1 \vee \delta)$, $(\gamma_2 \vee \delta)$ lo es. Es decir SI

$$r \vee ((p \cdot q) \supset r) \vee \sim p$$

o

$$q \vee \sim p$$

o

$$\sim(p \cdot r) \vee \sim p$$

son válidos, y ninguno de ellos lo es. Así pues, el término de la conjunción no es válido y por tanto la fórmula completa no es válida (no hace falta que probemos el otro miembro de la conjunción). Por tanto, si el Ejemplo 3 es el resultado de reducir una fórmula a FNCM, la fórmula original no es válida.

Tenemos ahora que demostrar que el procedimiento que hemos descrito es una prueba efectiva de la validez-S5.

Ya hemos demostrado en la pág. 57 y ss. que existe un procedimiento efectivo para encontrar, para cada fbf, α', una fbf, α', que esté en FNCM ordenada y sea tal que $\vdash_{S5} (\alpha \equiv \alpha')$. (Las equivalencias utilizadas en los pasos 2 y 3 del procedimiento de decisión figuran entre las utilizadas en el capítulo 3 para la reducción a FNCM). También hemos demostrado en la pág. 68 que toda tesis de S5 es válida-S5. Por

tanto $(\alpha \equiv \alpha')$ es válida-S5, de lo cual se sigue que α es válida-S5 SI α' lo es. Ahora bien, una conjunción es válida SI cada uno de los términos de ella es válido, y cada uno de los términos de la conjunción en α' es de la forma:

$$\beta \vee L\gamma_1 \vee \ldots \vee L\gamma_n \vee M\delta$$

Lo que falta, por tanto, es demostrar que la prueba descrita en el paso 4 del procedimiento de decisión es una prueba efectiva de la validez-S5 de las fórmulas de esta forma.

(a) Demostramos que si cualquiera de éstos, $(\beta \vee \delta), (\gamma_1 \vee \delta), \ldots, (\gamma_n \vee \delta)$ es válido CP, entonces

$$(1)\ \beta \vee L\gamma_1 \vee \ldots \vee L\gamma_n \vee M\delta$$

es válido-S5.

Supóngase que $(\beta \vee \delta)$ es válida CP. Entonces, puesto que S5 contiene una base completa para CP $\vdash_{S5} (\beta \vee \delta)$. De acuerdo con T1, $\vdash_{S5} (\delta \supset M\delta)$. Por tanto, según $(q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$ y MP $\vdash_{S5} (\beta \vee M\delta)$; y por tanto, según $p \supset (q \vee p)$ y Conm $\vdash_{S5} (1)$. Mas, todas las tesis de S5 son válidas-S5, por tanto (1) es válida-S5.

Supóngase ahora que una de las expresiones $(\gamma_1 \vee \delta), \ldots, (\gamma_n \vee \delta)$, por ejemplo, $(\gamma_j \vee \delta)$ es válida CP. Entonces al igual que antes $\vdash_{S5} (\gamma_j \vee \delta)$ y de acuerdo con N, $\vdash_{S5} L(\gamma_j \vee \delta)$. Por tanto de acuerdo con T28 (pág. 54) $\vdash_{S5} (\gamma_j \vee M\delta)$. A partir de esto se sigue como antes que $\vdash_{S5} (1)$ y por consiguiente es válida-S5.

(b) Demostramos que si ninguna de las expresiones $(\beta \vee \delta), (\gamma_1 \vee \delta), \ldots, (\gamma_n \vee \delta)$ es válida CP, entonces (1) no es válida-S5.

Para hacer esto construimos el siguiente modelo S5, $<$MU, V$>$ · MU $= \{mu_0, mu_1, \ldots, mu_n\}$. Es decir existen exactamente $n + 1$ mundos en el modelo. Con mu_0 asociamos $(\beta \vee \delta)$, y con cada uno de los miembros mu_1, mu_n asociamos un miembro distinto de $(\gamma_1 \vee \delta), \ldots, (\gamma_n \vee \delta)$ tal como indique el subíndice de γ. Definimos V como sigue: en mu_0 V realiza algunas asignaciones de valor a las variables que producirán V $((\beta \vee \delta), mu_0) = 0$ y en cada mu_j entre $mu_1, \ldots, mu_n$, V realiza algunas asignaciones a las variables que producirán V $((\gamma_j \vee \delta), mu_j) = 0$. (Puesto que cada uno de los miembros de $(\beta \vee \delta), (\gamma_1 \vee \delta), \ldots, (\gamma_n \vee \delta)$ es, por hipótesis, una fórmula-CP no válida, habrá para cada uno de ellos una *asignación-CP* que lo haga falso. Simplemente hacemos que la V de nuestro modelo-S5 dé en mu_0 los valores dados por aquella asignación particular CP que hace falso $(\beta \vee \delta)$, y en cada mu_j los valores dados por aquella particular asignación-CP que hace falso $(\gamma_j \vee \delta)$.)

Ahora demostramos que en tal modelo, V $((1), mu_0) = 0$ y por tanto que (1) no es válido-S5.

De acuerdo con la definición de V, V $((\beta \vee \delta), mu_0) = 0$. De aquí, de acuerdo con [V $\vee$], V $(\beta, mu_0) = 0$ y V $(\delta, mu_0) = 0$. De modo semejante para cada mu_j de entre $mu_1, \ldots, mu_n$, V $(\gamma_j, mu_j) = 0$ y V $(\delta, mu_j) = 0$. Por tanto para cada $mu_i \in$MU, V $(\delta, mu_i) = 0$, y a partir de aquí de acuerdo con [VM], V $(M\delta, mu_0) = 0$. Más aún, para cada γ_j de entre $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, existe algún $mu_i \in$MU (a saber mu_j) tal que V $(\gamma_j, mu_i) = 0$; y entonces de acuerdo con [VL], V $(L\gamma_j, mu_0) = 0$ en todos los casos. Por tanto, cada disyunto de (1) tiene el valor 0 en mu_0 y de este modo de acuerdo con [V $\vee$], V $((1), mu_0) = 0$.

(Si (1) no contiene ningún disyunto β no modalizado, suprimimos mu_0 en el modelo. Podemos entonces probar mediante el mismo método que para cualquier $mu_i \in$MU, V $((1), mu_i) = 0$).

Podemos dar un ejemplo de la construcción de un modelo-S5 falsificador en un caso particular utilizando el primer término de la conjunción de nuestro ejemplo 3, que resultó ser no válido. Este es:

$$(r \vee ((p \cdot q)) \supset r)) \vee Lq \vee L \sim (p \cdot r) \vee M \sim p$$

Aquí β es $(r \vee ((p \cdot q) \supset r))$, γ_1 es q, γ_2 es $\sim (p \cdot r)$ y δ es $\sim p$. Ahora bien:

1. $(((r \vee ((p \cdot q) \supset r) \vee \sim p)$ no es válida CP y resulta falsificada mediante la siguiente asignación CP V_1:

$$V_1(p) = 1, \quad V_1(q) = 1, \quad V_1(r) = 0$$

2. $q \vee \sim p$ no es válida CP y resulta falsificada mediante la asignación:

$$V_2(p) = 1, \quad V_2(q) = 0, \quad V_2(r) = 1$$

3. $\sim(p \cdot r) \vee \sim p$ no es válida CP y resulta falsificada mediante la asignación:

$$V_3(p) = 1, \quad V_3(q) = 1, \quad V_3(r) = 1$$

Construimos el siguiente modelo-S5:

Sea $\quad MU = \{mu_0, mu_1, mu_2\}$

Sea

$V(p, mu_0) = V_1(p) = 1$, $V(q, mu_0) = V_1(q) = 1$, $V(r, mu_0) = V_1(r) = 0$

$V(p, mu_1) = V_2(p) = 1$, $V(q, mu_1) = V_2(q) = 0$, $V(r, mu_1) = V_2(r) = 1$

$V(p, mu_2) = V_3(p) = 1$, $V(q, mu_2) = V_3(q) = 1$, $V(r, mu_2) = V_3(r) = 1$

A partir de esto es fácil demostrar que $V((r \vee ((p \cdot q) \supset r)), mu_0) = 0$; $V(q, mu_1) = 0$; y de aquí $V(Lq, mu_0) = 0$; $V(\sim(p \cdot r), mu_2) = 0$ y de aquí $V(L \sim (p \cdot r), mu_0) = 0$; $V(\sim p, mu_0) = V(\sim p, mu_1) = V(\sim p, mu_2) = 0$, de aquí $V(M \sim p, mu_0) = 0$; y por tanto $V((r \vee ((p \cdot q) \supset r) \vee Lq \vee L \sim (p \cdot r) \vee M \sim p), mu_0) = 0$. Por tanto, el término de la conjunción (y por consiguiente la conjunción entera) no es válido.

La completitud de S5

Resulta ahora sencillo demostrar que S5 está completo, es decir que si α es válida-S5, entonces $\vdash_{S5} \alpha$.

Sea α' la FNCM ordenada de α. Ya hemos demostrado que α es válida-S5 SI cada término de la conjunción, C_i, en α' es válido-S5. Ahora bien, cada C_i es de la forma

$$(1) \quad \beta \vee L\gamma_1 \vee \ldots \vee L\gamma_n \vee M\delta$$

y demostramos anteriormente en (b) que si (1) es válida-S5 entonces al menos uno de los términos de $(\beta \vee \delta)$, $(\gamma_1 \vee \delta)$, ..., $(\gamma_n \vee \delta)$ es válido-CP. Mas, también demostramos en el curso del anterior (a) que si cualquiera de éstos es válido-CP entonces $\vdash_{S5}$ (1). Por tanto si α es válida-S5 entonces para cada C_i de α', $\vdash_{S5} C_i$; y por consiguiente de acuerdo con Adjunción, $\vdash_{S5} \alpha'$. Pero también hemos demostrado que $\vdash_{S5} (\alpha \equiv \alpha')$; por tanto $\vdash_{S5} \alpha$.

Esta prueba de completitud, al igual que las que hemos dado para T y S4, muestra cómo podemos transformar una prueba de validez (validy test) en una prueba (proof) del sistema axiomático siempre que la fórmula sea válida. Como muestra del método de la prueba (proof) podemos considerar nuestro Ejemplo 1 (pág. 58 y págs. 105-106).

Probamos el primer término de la conjunción, a saber:

$$L \sim p \vee Lp \vee Mp$$

Se ha demostrado que éste es válido, ya que $\sim p \vee p$ es válido-CP;

por tanto: $\vdash_{S5} \sim p \vee p$

por tanto, de acuerdo con N: $\vdash_{S5} L(\sim p \vee p)$

por tanto, de acuerdo con T28: $\vdash_{S5} L \sim p \vee Mp$

y por tanto: $\vdash_{S5} L \sim p \vee Lp \vee Mp$

Para el otro término de la conjunción pasamos de $\vdash_{S5} p \vee \sim p$ a $\vdash_{S5} Lp \vee M \sim p$ y por tanto a $\vdash_{S5} L \sim p \vee Lp \vee M \sim p$.

Habiendo probado ambos términos de la conjunción, usamos Adjunción para probar la FNCM y las varias equivalencias S5 y Eq para probar la fórmula original.

Ejercicios 6

6.1. Probar (test) la validez en S4 de:

(a) $M(Mp \cdot \sim q) \vee L(p \supset Lq)$

(b) $MLp \supset LMp$

(c) $MLp \equiv LMp$

(d) $L(Lp \supset q) \vee L(Lq \supset p)$

(e) $L(Lp \supset q) \supset L(Lp \supset Lq)$

(f) $L(p \equiv q) \supset L(Lp \equiv Lq)$

6.2. Para las fórmulas de 6.1:

(a) Construir modelos-S4 falsificadores para aquéllas que no sean válidas.

(b) Para las que sean válidas-S4 pero no válidas-T constrúyanse modelos falsificadores T y demuéstrese por qué no pueden ser modelos-S4.

6.3. Pruébese (test) la validez en S5 de todas las fórmulas del Ejercicio 3.5.

6.4. Redúzcanse las siguientes fórmulas a FNCM y pruébese (test) su validez-S5.

(a) $(p \dashv (q \dashv r)) \supset (q \supset (p \dashv r))$

(b) $((p = q) \dashv Mq) \supset ((p = q) \dashv q)$

(c) $((p \dashv Lp) \dashv Lp) \supset (MLp \supset Lp)$

6.5. Para las fórmulas de los ejercicios 6.3 y 6.4 proporciónese un modelo-S5 falso si no son válidas y un esbozo de prueba si son válidas.

CAPITULO VII

ALGUNAS BASES PERMUTABLES PARA T, S4 Y S5

Podemos definir un sistema axiomático de cualquiera de las dos maneras siguientes: con referencia a su base, o con referencia a sus tesis. En muchos casos no importa la definición que adoptemos, pero cada una de ellas, sin embargo, nos llevará a hablar de un modo un tanto diferente. Supongamos que tenemos dos sistemas, A y B, con exactamente las mismas tesis, pero con diferentes bases. Si hablamos de acuerdo con el primer tipo de definición –que es el que hemos estado utilizando hasta ahora– diremos que A y B son sistemas distintos, pero que son deductivamente equivalentes. Si hablamos de acuerdo con el segundo tipo de definición diremos que son el mismo sistema, pero con distintas bases, o que B proporciona una base permutable (alternative) para, o una axiomatización permutable (alternative) de, A. A veces es más conveniente utilizar el segundo tipo de definición y en tanto que no se produzca confusión ningún daño puede derivarse de ello.

En este capítulo consideramos algunas bases permutables (alternative) para los sistemas T, S4 y S5.

Bases permutables para T

La primera nueva base para T que consideraremos es la siguiente:

Los símbolos primitivos, las reglas de formación y las definiciones, son los mismos que los de T (pág. 36-37).

Los axiomas, sin embargo, difieren. Constan de algún conjunto completo para CP[65], tal como los de PM, más

A5 $Lp \supset p$ (como antes)
A9 $(Lp \cdot Lq) \equiv L(p \cdot q)$
A10 $L(p \supset p)$

Como reglas de transformación tenemos aquí también Sustitución y Separación (detachment), pero en lugar de RT3 tenemos:

RT4 $\vdash (\alpha \equiv \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha \equiv L\beta)$

Denominaremos al sistema derivado de esta base, T′. Ahora probaremos que es deductivamente equivalente a T, es decir que T′ contiene a T y T contiene a T′.

Para probar que T′ contiene a T es suficiente derivar a partir de la base de T′. aquellas partes de la base de T que no están en la base de T′. Es decir tenemos que

---

[65] En la III Parte consideramos bases axiomáticas que no se forman mediante adiciones a CP.

demostrar que A6 es un teorema de T′ y que RT3 es una regla de transformación derivada de T′.

A6 $L\,(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$

PRUEBA EN T′

A9 $[p \supset q/q]$:	(1)	$(Lp \cdot L\,(p \supset q)) \equiv L\,p \cdot (p \supset q))$	
CP[66]:	(2)	$(p \cdot (p \supset q)) \equiv (p \cdot q)$	
(2) x RT4:	(3)	$L\,(p \cdot (p \supset q)) \equiv L\,(p \cdot q)$	
CP:	(4)	$(p \equiv q) \supset ((q \equiv r) \supset (p \equiv r))$	
(1), (3) x (4)	(5)	$(Lp \cdot L\,(p \supset q)) \equiv L\,(p \cdot q)$	
CP:	(6)	$(p \equiv q) \supset ((r \equiv q) \supset (p \equiv r))$	
(5), A9 x (6)	(7)	$(Lp \cdot L\,(p \supset q)) \equiv (Lp \cdot Lq)$	
(7) x CP:	(8)	$(Lp \cdot L\,(p \supset q)) \supset (Lp \cdot Lq)$	
CP:	(9)	$((p \cdot q) \supset (p \cdot r)) \supset (q \supset (p \supset r))$	
(8) x (9):	(10)	$L\,(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$	**Q.E.D.**

RT3 (N) $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\,\alpha$

DERIVACION EN T′

Dado:	(1)	α	
CP $[\alpha/q]$:	(2)	$\alpha \supset ((p \supset p) \equiv \alpha)$	
(1), (2) x MP:	(3)	$(p \supset p) \equiv \alpha$	
(3) x RT4:	(4)	$L\,(p \supset p) \equiv L\,\alpha$	
(4) x CP:	(5)	$L\,(p \supset p) \supset L\,\alpha$	
A10, (5) x MP:	(6)	$L\,\alpha$	**Q.E.D.**[67]

Hemos demostrado ahora que T′ contiene a T. Para demostrar que T contiene a T′ tenemos simplemente que remitirnos a las partes apropiadas del Capítulo 2. A9 es T3 (pág. 39); RT4 es RD2 (pág. 40) y A10 se sigue inmediatamente de la tesis CP $p \supset p$, de acuerdo con N.

Por tanto T′ es deductivamente equivalente a T.

T y T′ son sistemas con base-*L* en el sentido explicado en la pág. 34. Un sistema con base-*M* deductivamente equivalente a T es el sistema M de von Wright[68]. Para conseguir M añadimos lo siguiente a una base completa para CP:

M como primitiva
[Def *L*] $L\,\alpha_{\mathrm{DF}} = \sim M \sim \alpha$

---

66 De ahora en adelante, confiando en la conocida completitud de una base tal como la de PM, simplemente escribimos "CP" para justificar la cita de cualquier fórmula CP válida, aparezca o no aparezca en las listas del Capítulo 1.

67 La sustitutibilidad de RT3 por RT4 y A10 (que es lo que esta derivación demuestra) fue observada por Sobociński [1953].

68 Von Wright [1951], págs. 84-5. La equivalencia deductiva de M y T fue mostrada por Sobociński [1953] págs. 173-175.

Axiomas

A11 $p \supset Mp$

A12 $M(p \vee q) \equiv (Mp \vee Mq)$

Reglas de transformación

RT3 $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\,\alpha$

RT5 $\vdash (\alpha \equiv \beta) \rightarrow \vdash (M\,\alpha \equiv M\,\beta)$

Es fácil demostrar que T contiene a M: A11 y A12 son T1 y T7 respectivamente (en el capítulo 3); RT5 se deriva fácilmente de RD3; y T5, de acuerdo con Eq, puede hacerse que haga la función de Def L. Dejamos como ejercicio la prueba (proof) de que M contiene a T.

En vista de la equivalencia deductiva de T, T′ y M, normalmente los denominaremos T indistintamente, y usaremos la axiomatización que nos resulte más conveniente.

Bases permutables para S4

En el Capítulo 4 obteníamos el sistema S4 añadiendo a la base de T el nuevo axioma A7: $Lp \supset LLp$. Otra manera de obtenerlo es sustituir A6$(L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq))$ por el axioma más consistente (stronger):

A13 $L(p \supset q) \supset L(Lp \supset Lq)$[69]

Denominaremos al sistema así obtenido S4′. Ahora probamos que es deductivamente equivalente a S4.

Para probar (prove) que S4′ contiene a S4 tenemos que derivar A6 y A7 en S4′. Evidentemente A6 se sigue de A13 de acuerdo con A5 y Sil. (Por tanto S4′ contiene a T). Para A7 procedemos como sigue:

A7 $Lp \supset LLp$

PRUEBA EN S4′

CP:	(1)	$p \supset ((p \supset p) \supset p)$	
(1) x RD1:	(2)	$Lp \supset L((p \supset p) \supset p)$	
A13 $[p \supset p/p, p/p]$:	(3)	$L((p \supset p) \supset p) \supset L(L(p \supset p) \supset Lp)$	
A6 $[L(p \supset p)/p, Lp/q]$:	(4)	$L(L(p \supset p) \supset Lp) \supset (LL(p \supset p) \supset LLp)$	
(2), (3), (4) x Sil:	(5)	$Lp \supset (LL(p \supset p) \supset LLp)$	
(5) x Perm:	(6)	$LL(p \supset p) \supset (Lp \supset LLp)$	
Id x RT3 (dos veces)	(7)	$LL(p \supset p)$	
(7), (6) x MP:	(8)	$Lp \supset LLp$	**Q.E.D.**

Para probar (prove) que S4 contiene a S4′ tenemos simplemente que derivar A13 en S4.

A13 $L(p \supset q) \supset L(Lp \supset Lq)$

---

[69] Cf. Parry [1939], especialmente el Teorema 32.1, pág. 147; y Lemmon [1957], pág. 178.

PRUEBA EN S4

A7 $[p \supset q/p]$:	(1)	$L(p \supset q) \supset LL(p \supset q)$	
A6 x RD1:	(2)	$LL(p \supset q) \supset L(Lp \supset Lq)$	
(1), (2) x Sil:	(3)	$L(p \supset q) \supset L(Lp \supset Lq)$	**Q.E.D.**

El sistema M′ de von Wright se obtiene añadiendo al sistema M el nuevo axioma

A14 $MMp \supset Mp$

A14 es T18 en el capítulo 3; y la derivación a partir de él del característico axioma de S4 ($Lp \supset LLp$) es muy directa. Por tanto M′ es un sistema de base-*M* deductivamente equivalente a S4[70].

Bases permutables para S5

En el capítulo 3 conseguíamos S5 añadiendo A8 ($Mp \supset LMp$) a T. Esto formaba parte de nuestro programa de ir mostrando T, S4 y S5 como sistemas progresivamente más completos (stronger), y presentaba la evidente ventaja de permitirnos lo que puede probarse sin utilizar las diversas leyes de reducción. No obstante, si deseamos construir S5 directamente, sin partir de T, podemos hacerlo más brevemente, como sigue:

Comenzamos, como antes, por una base completa para CP, *L* como primitivo, y las definiciones acostumbradas de los restantes operadores modales. A esto no añadimos ningún nuevo axioma, sino tan sólo las dos siguientes reglas de transformación:

RT6 $\vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha \supset \beta)$

RT7 Si α es modalizada del todo (es decir si todas las variables proposicionales de α aparecen dentro del ámbito (scope) de un operador modal) entonces $\vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (\alpha \supset L\beta)$[71].

Se obtiene una pequeña variante de esta base utilizando el conocido A5 ($Lp \supset p$) en lugar de RT6. Es fácil demostrar que A5 y RT6 pueden derivarse el uno del otro. Si tenemos RT6, entonces, puesto que de acuerdo con CP, $\vdash (p \supset p)$, obtenemos inmediatamente $\vdash (Lp \supset p)$, es decir A5. Y si tenemos a A5 como axioma podemos derivar RT6 como sigue:

Dado	(1)	$\alpha \supset \beta$	
A5 $[\alpha/p]$:	(2)	$L\alpha \supset \alpha$	
(2), (1) x Sil:	(3)	$L\alpha \supset \beta$	**Q.E.D.**

Llamaremos al sistema derivado de aquella base (ya se use RT6 o se use A5), S5′. Ahora probamos (prove) que es deductivamente equivalente a S5.

Para probar (prove) que S5′ contiene a S5 tenemos que derivar A6, A8 y RT3 en S5′. Lo hacemos del modo siguiente:

A6 $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$

---

70 Von Wright [1951] págs. 84-5. En las págs. 89-90 demuestra Von Wright la equivalencia de M′ y S4 –una conclusión menos trivial en ese contexto de lo que podría parecer por nuestro presente tratamiento, ya que él no estuvo considerando a S4 como una extensión de T o de algún sistema equivalente. (T no era uno de los sistemas de Lewis originales – *vide infra* págs. 197-198).

71 Cf. Prior [1955], pág. 202. Obsérvese que la primera edición del libro de Prior contiene un error: de hecho *toda* variable de α debe estar modalizada, no simplemente aquellas que también aparezcan en β, como se dice allí.

PRUEBA EN S5′

A5 [$p \supset q/p$]:	(1)	$L\,(p \supset q) \supset (p \supset q)$	
(1) x Perm:	(2)	$p \supset (L\,(p \supset q) \supset q)$	
(2) x RT6:	(3)	$Lp \supset (L\,(p \supset q) \supset q)$	
(3) x Imp:	(4)	$(Lp \cdot L\,(p \supset q)) \supset q$	
(4) x RT7:	(5)	$(Lp \cdot L\,(p \supset q)) \supset Lq$	
(5) x Conm x Exp:	(6)	$L\,(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$	**Q.E.D.**

A8 $Mp \supset LMp$

PRUEBA EN S5′

Id [Mp/p]:	(1)	$Mp \supset Mp$	
(1) x RT7:	(2)	$Mp \supset LMp$	**Q.E.D.**

RT3 $\vdash \alpha \rightarrow\!\!\!\!+\; L\,\alpha$

DERIVACION EN S5′

Dado:	(1)	α	
CP:	(2)	$p \supset (q \supset p)$	
(1) x (2) [$\alpha/p, Lp \supset Lp/q$]:	(3)	$(Lp \supset Lp) \supset \alpha$	
(3) x RT7:	(4)	$(Lp \supset Lp) \supset L\,\alpha$	
Id [Lp/p]	(5)	$Lp \supset Lp$	
(5), (4) x MP:	(6)	$L\,\alpha$	**Q.E.D.**

Para probar que S5 contiene a S5′ tenemos únicamente que derivar RT7 en S5[72].

Primero probamos el siguiente Lema:
Si α está modalizada del todo, entonces $\vdash_{S5} (\alpha \equiv L\,\alpha)$

PRUEBA

Supondremos que α está escrita en notación primitiva (es decir con $\sim$, $\vee$ y L como únicos operadores). Luego α o bien es de la forma $L\,\beta$ (siendo β alguna fbf) o de lo contrario se construye mediante $\sim$ y/o $\vee$, mediante las reglas de formación, a partir de uno o más componentes cada uno de los cuales sea de la forma $L\beta$. Demostramos (i) que el Lema es válido para toda fbf de la forma $L\beta$; y luego (ii) que si es válido para un determinado conjunto de fórmulas también es válido para cualquier fbf que pueda ser construida a partir de estas fórmulas mediante $\sim$ y $\vee$. A partir de esto, mediante inducción en la construcción de α se sigue que el Lema es válido para toda fórmula totalmente modalizada.

(i) Si α es $L\,\beta$, entonces $L\,\alpha$ es $LL\,\beta$. Pero de acuerdo con R4 (pág. 54) ($L\,\beta \equiv LL\,\beta$) en S5 (y S4). Por tanto el Lema es válido en este caso.

(ii) Supóngase que γ es una fórmula para la que el Lema es válido. Entonces tenemos:

---

72 Lemmon [1956].

Dado:	(1)	$\gamma \equiv L\gamma$
(1) x CP:	(2)	$\sim\gamma \equiv \sim L\gamma$
R1 $[\sim\gamma/p]$:	(3)	$M\sim\gamma \equiv LM\sim\gamma$
(3) x ILM:	(4)	$\sim L\gamma \equiv L\sim L\gamma$
(2), (4) x Eq:	(5)	$\sim\gamma \equiv L\sim L\gamma$
(5), (1) x Eq:	(6)	$\sim\gamma \equiv L\sim\gamma$

Por tanto si el Lema es válido para γ es válido para $\sim\gamma$.

Supóngase ahora que γ y δ son dos fórmulas para las que el Lema vale. Entonces tenemos:

Dado:	(1)	$\gamma \equiv L\gamma$
	(2)	$\delta \equiv L\delta$
CP:	(3)	$(p \equiv q) \supset ((r \equiv s) \supset ((p \vee r) \equiv (q \vee s)))$
(1), (2) x (3):	(4)	$(\gamma \vee \delta) \equiv (L\gamma \vee L\delta)$
T29 (pág. 54) $[\gamma/p, \delta/q]$:	(5)	$L(\gamma \vee L\delta) \equiv (L\gamma \vee L\delta)$
(4), (5) x Eq:	(6)	$(\gamma \vee \delta) \equiv L(\gamma \vee L\delta)$
(6), (2) x Eq:	(7)	$(\gamma \vee \delta) \equiv L(\gamma \vee \delta)$

Por tanto si el Lema vale para γ y para δ, vale para $(\gamma \vee \delta)$.

Esto completa la prueba del Lema.

La derivación de RT7 en S5 es directa ahora. Suponiendo que α está completamente modalizada, tenemos:

Dado:	(1)	$\alpha \supset \beta$
De acuerdo con Lema	(2)	$\alpha \equiv L\alpha$
(1) x RD1:	(3)	$L\alpha \supset L\beta$
(3), (2) x Eq:	(4)	$\alpha \supset L\beta$

Esto completa la prueba de que S5′ es deductivamente equivalente a S5.

Un sistema de base-*M* deductivamente equivalente a S5 es el M″ de von Wright[73], que se obtiene añadiendo a M el nuevo axioma:

A15 $M\sim Mp \supset \sim Mp$

A15 produce el característico axioma S5 ($Mp \supset LMp$) mediante Transp y Def L, y es él mismo derivable del teorema de S5 T25 (pág. 52) de acuerdo con $[\sim p/p]$ y ILM.

Las bases consideradas en este capítulo son únicamente unas cuantas de entre otras muchas posibles. Pero con las vistas bastará para dar una idea de lo que pueden ser las bases permutables (alternative).

Ejercicios 7

7.1. (a) T″ es T′ con RD1 ($\vdash \alpha \supset \beta \rightarrow \vdash L\alpha \supset L\beta$) como regla primitiva en lugar de RT4. Demostrar que T″ y T′ son deductivamente equivalentes.

---

[73] Von Wright [1951], págs. 84-5, 90.

(b) Demostrar que la omisión de A10 en T′ produciría un sistema menos potente (weaker) (es decir demostrar que A10 es independiente).

7.2. (a) Demostrar que el sistema M contiene al sistema T.

(b) M* es M pero con A10 sustituyendo a RT3. Demostrar que M* y M son deductivamente equivalentes.

7.3. T* está formado a partir de T sustituyendo A6 y RT3 por A10 y la regla $\vdash (\alpha \cdot \beta) \supset \gamma \rightarrow \vdash (L\,\alpha \cdot L\,\beta) \supset L\,\gamma$; y S4 está formado a partir de T, sustituyendo A6 y RT3 por A10 y por la regla

$$\vdash (L\,\alpha \cdot L\,\beta) \supset \gamma \rightarrow \vdash (L\,\alpha \cdot L\,\beta) \supset L\,\gamma$$

(a) Demostrar que T y T* son deductivamente equivalentes.

(b) Demostrar que S4 y S4* son deductivamente equivalentes.

7.4. (a) Demostrar que la adición a T de la fórmula $(B'')\ p \supset LLMp$, como axioma, produce S5.

Demostrar que RT3 no es independiente en M″ (es decir, que puede derivarse del resto de la base).

PARTE II

LOGICA DE PREDICADOS MODAL

CAPITULO VIII

CALCULO ELEMENTAL DE PREDICADOS

El cálculo elemental de predicados no modal

Haremos primeramente en la parte II lo que hicimos en el capítulo I de la parte I, es decir, daremos un esbozo de lo que tiene que saberse del Cálculo Elemental de Predicados "ordinario" no modal, a fin de que pueda comprenderse su extensión a la lógica modal, que veremos a continuación. Normalmente utilizaremos "CEP" como abreviatura de "Cálculo Elemental de Predicados"[74]. Para mayor simplicidad adoptamos una forma del CEP que no contiene ni variables proposicionales, ni constantes individuales, ni constantes predicativas, ya que éstas no son esenciales para la exposición de las características distintivas de la lógica de predicados modal.

Símbolos primitivos de CEP

1. Un conjunto de *variables individuales*: x, y, z, ... (con o sin subíndices numerales).
2. Un conjunto de *variables predicativas*: ϕ, ψ, χ, ...

Nos suponemos poseedores de un número ilimitado de cada tipo de variables.

3. Los símbolos $\sim$, $\vee$, $\forall$, (,).

Reglas de formación

RF1 Una expresión que conste de una variable predicativa seguida de cualquier número de variables individuales es una fbf (una fbf *atómica*).

(En tal fbf, las variables individuales son los argumentos de la variable predicativa. Se dice que una variable predicativa con n argumentos[75] es de grado n, o que es una variable n-ádica).

RF2 Si α es una fbf también lo es $\sim\alpha$.

RF3 Si α y β son fbfs, también lo es $(\alpha \vee \beta)$, *siempre que* cualquier variable predicativa que aparezca más de una vez en $(\alpha \vee \beta)$ sea del mismo grado en todas las apariciones.

RF4 Si α es una fbf y $\mathbf{a}$[76] es cualquier variable individual, $(\forall \mathbf{a})\ \alpha$ es una fbf. (Siempre que no exista peligro de confusión omitiremos normalmente el símbolo $\forall$

---

74 El Cálculo de Predicados se conoce también como Cálculo Funcional. En vez de "Elemental" (Lower) se utiliza a menudo el término "Primer orden". Lo que distingue al CEP de cálculos de orden más elevado es que en CEP las únicas variables sobre las que se aplica la cuantificación son variables individuales. Un desarrollo habitual (standard) se encuentra en Church [1956], Capítulos III y IV. Otras explicaciones aparecen en Quine [1940] y [1950].

75 Para los propósitos de esta definición el número de los argumentos no es el número de las variables *distintas* sino el número total de variables distintas o no distintas. De este modo tanto en $\phi\ xyz$ como en $\phi\ xxz$, ϕ es de grado 3.

76 Utilizamos **a** y **b** como variables meta-lógicas que tienen como alcance variables individuales.

en fbfs de esta forma; es decir escribimos $(x)\,\phi x$ en vez de $(\forall x)\,\phi x$).

En una fbf del tipo acabado de describir, $(\forall \mathbf{a})$ (o $(\mathbf{a})$) se denomina *cuantificador universal*, y se dice que α es el *ámbito* (scope) de ese cuantificador. Una aparición de una variable, **a**, en una fbf, α, (no como parte de un cuantificador) se dice que es o *libre* o *ligada* en α. Si no se encuentra dentro del ámbito de ningún cuantificador de α que contenga **a**, se dice que está libre en α. De lo contrario se dice que está ligada en α; y si **a** está libre en α, se dice que *está ligada por* (**a**) en $(\mathbf{a})\,\alpha$. De este modo en la fórmula

$$(1)\quad (x)\,(\phi x \vee \psi y)$$

la x que aparece inmediatamente después de ϕ está ligada (por el cuantificador (x) del principio), pero y está libre. Obsérvese, sin embargo, que incluso cuando hablamos de (1) decimos que x está libre en $(\phi x \vee \psi y)$ ya que ningún cuantificador que contenga a x aparece en *esa* expresión, aunque, por supuesto, x no está libre en la propia (1). Obsérvese también que son las *apariciones* de las variables las que están ligadas o libres, y que la misma variable puede aparecer a la vez ligada y libre en la misma fórmula, como, por ejemplo, x lo hace en $(x)\,\phi x \supset \phi x$.

Establecemos, como hicimos para CP, la convención de que los paréntesis más exteriores de una fórmula pueden omitirse. A veces también insertamos paréntesis no exigidos por las reglas de formación a fin de facilitar la lectura.

Introducimos los operadores $\cdot$, $\supset$ y $\equiv$ mediante las mismas definiciones que en CP. También introducimos el símbolo $\exists$ mediante la definición:

Siempre que **a** sea una variable individual cualquiera y α sea cualquier fbf,

$$(\exists \mathbf{a})\,\alpha =_{\mathrm{Df}} \sim(\forall \mathbf{a}) \sim \alpha$$

En una fbf de la forma $(\exists \mathbf{a})\,\alpha$, $(\exists \mathbf{a})$ se denomina *cuantificador existencial*. Las observaciones hechas anteriormente acerca del ámbito (scope) de los cuantificadores y acerca de las variables libres y ligadas son válidas también para el caso de los cuantificadores existenciales. (Como ocurría con L y M, es posible también un tratamiento análogo en CEP con $\exists$ como primitiva y $\forall$ como definida).

Interpretación

La interpretación que ha de hacerse de las fórmulas de CEP puede quedar suficientemente indicada del modo siguiente: Las variables individuales han de considerarse teniendo como alcance (ranging over) objetos o individuos, en el sentido más amplio. Las variables predicativas de grado 1 tienen como alcance (range) propiedades de objetos, también en el sentido más amplio; las de grado n $(n > 1)$ tienen como alcance relaciones n-ádicas. Las fórmulas atómicas expresan (las formas de)proposiciones al efecto de que determinado objeto posee una determinada propiedad, o que determinado grupo de objetos están relacionados de un modo determinado: de esta forma "Pérez es rubio" es de la forma ϕx, "Tomás es el padre de Guillermo" es de la forma ϕxy, "24 está entre 19 y 32" es de la forma ϕxyz, y así sucesivamente. Los operadores $\sim$, $\vee$, $\cdot$, $\supset$ y $\equiv$ han de considerarse igual que en CP. Los cuantificadores universal y existencial expresan las nociones *todo* (all) y *alguno* (es decir, *al menos uno*) respectivamente; más exactamente $(\mathbf{a})\,\alpha$ se entenderá significando "para todo valor de **a**, α", y $(\exists \mathbf{a})\alpha$ se entenderá significando "para algún valor de **a**, α". De este modo $(x)\,\phi x$ significa que independientemente del valor que asignemos a x, ϕx es verdadero, o dicho más brevemente que todo tiene la propiedad ϕ; y de modo semejante $(\exists x)\phi x$ significa que algo tiene la propiedad ϕ. Es fácil comprobar que la definición del existencial en términos del cuantificador universal es apropiada para esta interpretación.

La validez en CEP

Definiremos la validez en CEP como hicimos para los anteriores sistemas, en términos de asignaciones de valor y modelos. Para una asignación de valor CEP no es suficiente con pensar en asignar un valor de verdad a determinadas fórmulas y luego dar reglas para calcular los valores de verdad de las restantes, ya que aquí tenemos variables individuales y variables predicativas que tomar en consideración, y no podemos asignar valores de verdad a éstas. Para formar un modelo-CEP en primer lugar presuponemos algún dominio (domain) o conjunto no vacío, D, de individuos, $\{u_1, u_2, ..., u_i, ...\}$. Un modelo-CEP $<$D, V$>$ consta, pues, de este dominio juntamente con un valor de asignación, V, que satisfaga las siguientes condiciones:

Para cada variable individual V asigna algún miembro de D. Escribimos "V$(x)=u$" para significar "V asigna u a x" y así sucesivamente.

Para variables predicativas procedemos del modo siguiente: Si ϕ es un predicado monádico conviene, teniendo en cuenta nuestros presentes propósitos, considerar a la propiedad ϕ como determinada por el conjunto de objetos que la poseen; es decir si ϕx significa "x es humano", podemos, en lugar de considerar a ϕ como la propiedad abstracta de humanidad, considerarla en términos del conjunto de seres humanos. Para el caso de un predicado diádico si ϕxy significa "x es el padre de y" podemos considerar a ϕ en términos del conjunto de pares ordenados tales que en cada uno de ellos el primero es el padre del segundo; y podemos tratar los predicados de grado superior de modo análogo. Este modo de considerar las cosas sugiere que podríamos hacer que V asignase a cada variable predicativa n-ádica un conjunto de n-múltiples miembros ordenados de D; y esto es lo que haremos. Más exactamente, la condición que ha de satisfacer V en lo que atañe a variables predicativas es ésta: para cada variable n-ádica ϕ, V(ϕ) es algún conjunto de n-múltiplos ordenados

$$\{<u_{i1}, ..., u_{in}>, <u_{j1}, ..., u_{jn}>, ...\}$$

de miembros de D.

Dados V(x_i) y V(ϕ) para cada variable individual x_i y para cada variable predicativa ϕ, valoramos todas las fórmulas del modo siguiente:

1. Para una fórmula atómica, es decir una que coste de una variable n-ádica ϕ seguida de variables individuales $x_1, ... x_n$ $(n \geqslant 1)$, V$(\phi(x_1, ..., x_n)) = 1$ SI $<$V$(x_1, ...,$ V$(x_n)>\in$ V(ϕ); en caso contrario V$(\phi(x_1, ..., x_n))=0$ (Es decir la fórmula tiene el valor 1 ó 0 según el n-múltiple de los miembros de D asignados por V a $x_1, ..., x_n$, respectivamente sea o no sea uno de los asignados por V a ϕ).

Para $\sim$ y $\vee$ las reglas son las mismas que las de CP, a saber:

2. [V $\sim$]. Si α es una fbf, entonces V$(\sim\alpha)=1$ si V$(\alpha)=0$; de lo contrario V$(\sim\alpha)=0$.

3. [V $\vee$]. Si α y β son fbfs, entonces V$(\alpha\vee\beta)=1$ si ya bien V$(\alpha)=1$ o V$(\beta)=1$; en caso contrario V$(\alpha\vee\beta)=0$.

Para la cuantificación la regla es:

4. [V $\forall$]. Si α es una fbf y **a** es una variable individual, entonces V$((\mathbf{a})\alpha)=1$ si para cada asignación CEP V′ que da a todas las variables excepto **a** los mismos valores que les da V, V′$(\alpha)=1$; de lo contrario V$((\mathbf{a})\alpha)=0$.

(Esta última regla puede expresarse intuitivamente diciendo que $(\mathbf{a})\alpha$ es verdadera en el modelo —tiene el valor 1— SI α es verdadera independientemente de qué valor se le asigne a **a**; mas, puesto que α puede contener otras variables libres además de **a** tenemos que presuponer que éstas se mantienen constantes, y de este

modo exigimos que V′ sea lo mismo que V excepto en lo que se refiere a su asignación a **a**).

Habiendo definido ya un modelo-CEP podemos definir la validez en CEP diciendo que una fbf α es válida-CEP SI para todo modelo-CEP $<D, V>$, $V(\alpha) = 1$.

Aunque es posible dar una visión perfectamente clara de lo que constituye la validez en CEP sin embargo CEP no es un sistema decidible (decidable); es decir, no es posible dar un procedimiento general de decisión para la validez-CEP[77]. Lo mismo podemos decir de la aplicación de CEP a la lógica modal que estudiaremos en breve. En este aspecto CEP se diferencia en un aspecto importante de todos los sistemas que hemos considerado hasta ahora.

Axiomatización

Nuestro modo de axiomatización para CEP será distinto del que hemos utilizado al tratar con los sistemas proposicionales. En lugar de axiomas en el sentido de la parte I tendremos esquemas de axiomas[78]; y análogamente a los esquemas de axiomas tendremos esquemas de teoremas, es decir principios generales en el sentido de que cualquier fbf de una determinada forma es un teorema. Casi siempre demostraremos (prove) tales esquemas de teoremas en vez de teoremas particulares.

Es habitual, y muy conveniente, axiomatizar CEP como una extensión de CP y existen diversos modos de hacerlo. El que nosotros eligiremos consiste en tener un esquema de axioma que proporcione como axioma cualquier muestra de sustitución CEP de cualquier fbf válida de CP[79]. (Una muestra de sustitución CEP de una tesis CP es una fórmula obtenida a partir de una fbf CP válida mediante la sustitución uniforme de cada variable suya por alguna fbf de CEP).

Los esquemas de axiomas que utilizaremos para CEP son los siguientes:

CP Si α es una muestra de sustitución CEP de una fbf CP válida entonces α es un axioma.

∀1 Si **a** es cualquier variable individual, α cualquier fbf y β cualquier fbf que difiera de α sólo en tener alguna variable individual **b** que sustituya todas las apariciones libres de **a** en α, entonces

$$(a)\ \alpha \supset \beta$$

es un axioma, siempre que **a** no aparezca dentro del ámbito (scope) de ninguna aparición de un cuantificador que contenga **b**[80].

Las reglas de transformación primitivas son:

∀2 Si **a** es cualquier variable individual y α y β son fbfs cualesquiera, entonces

---

77 Esto se demuestra en Church [1936]. Existen, sin embargo, unos cuantos fragmentos decidibles de CEP (cf. Church [1956], págs. 247-257).

78 *Vide* nota número 8. La eliminación de reglas primitivas de sustitución uniforme hecha posible por el uso de esquemas de axioma en lugar de los axiomas ordinarios es muy conveniente en CEP cuando tales reglas, aún siendo formulables, son muy complicadas tanto en su establecimiento como en su aplicación.

79 Un método alternativo consistiría en incorporar a la base de CEP algún conjunto completo de axiomas (o esquemas de axioma) para CP con reglas de transformación adecuadas, pero puesto que CP es decidible existe un método efectivo para decidir respecto a cualquier fbf si es o no es un axioma en virtud del esquema de axioma en cuestión.

80 Otra manera de expresar esta condición es diciendo que no podemos sustituir **a** por ninguna variable que resulte ligada en el proceso, sino sólo por una que sea también libre. La necesidad de tal restricción puede verse a partir de un sencillo ejemplo. Sea a x, sea $\alpha\,(\exists y)\,\phi xy$ y sea β (contrariamente a la condición) $(\exists y)\,\phi yy$. Entonces ∀1 nos proporcionaría, sino fuera por la condición, como axioma:

$$\vdash \alpha \supset \beta \rightarrow \vdash \alpha \supset (\mathbf{a})\,\beta$$

siempre que **a** no aparezca libre en α[81].

MP $\vdash \alpha, \vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash \beta$

Esta base puede demostrarse (prove) que es (limitadamente (weakly)) completa; es decir puede mostrarse que, para toda fbf α, si α es válida-CEP, entonces α es derivable de la base citada (vide págs. 138-142).

Algunos teoremas de CEP

Reseñamos aquí algunos teoremas de CEP (en forma de esquemas) que serán útiles en posteriores aplicaciones. Omitimos pruebas, que son en todos los casos las habituales. En cada esquema de teorema α y β son fbfs cualesquiera y **a** y **b** son variables individuales cualesquiera.

CEP1 $(\mathbf{a})\,(\alpha \supset \beta) \supset ((\mathbf{a})\,\alpha \supset (\mathbf{a})\,\beta)$
CEP2 $(\mathbf{a})\,(\alpha \equiv \beta) \supset ((\mathbf{a})\,\alpha \equiv (\mathbf{a})\,\beta)$
CEP3 $(\mathbf{a})\,\alpha \equiv \sim(\exists\,\mathbf{a}) \sim\alpha$
CEP4 $(\exists\,\mathbf{b})\,((\exists\,\mathbf{a})\,\alpha \supset \beta)$, siendo β, α con **b** libre sustituyendo en todos los lugares a **a** libre, siempre que **b** no esté libre en α[82]

CEP5 $(\exists\,\mathbf{a})\,(\alpha \cdot \beta) \equiv (\alpha \cdot (\exists\,\mathbf{a})\,\beta)$, siempre que **a** no aparezca libre en α.
CEP6 $(\exists\,\mathbf{a})\,(\alpha \supset \beta) \equiv (\alpha \supset (\exists\,\mathbf{a})\,\beta)$, siempre que **a** no aparezca libre en α.
CEP7 $(\mathbf{a})\,\alpha \equiv (\mathbf{b})\,\beta$, diferenciándose α y β solamente en que α tiene **a** libre donde y sólo donde β tiene **b** libre.

Cuando α y β difieren sólo en el sentido acabado de describir, diremos que cada una de ellas es una *variante alfabética* de la otra, y que $(\mathbf{a})\,\alpha$ y $(\mathbf{b})\,\beta$ (e igualmente $(\exists\mathbf{a})\,\alpha$ y $(\exists\,\mathbf{b})\,\beta$ son *variantes alfabéticas ligadas* (la una de la otra). También diremos que dos fbfs, α y β, son variantes alfabéticas ligadas si α se diferencia de β sólo en tener alguna parte bien-formada, γ, donde β tiene δ, y γ es una variante alfabética ligada de δ[83].

$$(1) \quad (x)(\exists\,y)\,\phi xy \supset (\exists\,y)\,\phi yy$$

Pero (1) no es válida, ya que si ϕxy significa "x es hijo de y", entonces el antecedente significa "todo el mundo es hijo de alguien" (lo cual es verdadero), pero el consecuente significa "alguien es hijo de sí mismo" (lo cual es falso). El hecho de que no podamos sustituir x en $(\exists\,y)\,\phi xy$ por y (pero podríamos sustituirla por ejemplo por z) se expresa a veces diciendo que aunque x está libre en $(\exists\,y)\,\phi xy$, no está *libre para* y (aunque está libre para z).

81 $\forall 2$ se sustituye a menudo por reglas alternativas y esquemas de axiomas; por ejemplo, por la regla GU. $\vdash \alpha \vdash$ $(\mathbf{a})\,\alpha$ y el esquema de axioma $(\mathbf{a})(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset (\mathbf{a})\,\beta)$ (con tal que **a** no esté libre en α), o por la regla GU, y los dos esquemas de axioma $\alpha \equiv (\mathbf{a})\,\alpha$ (siempre que **a** no esté libre en α) y $(\mathbf{a})(\alpha \supset \beta) \supset ((\mathbf{a})\,\alpha \supset (\mathbf{a})\,\beta)$. Fácilmente puede demostrarse que las bases así obtenidas son equivalentes a la que estamos usando.

82 Por ejemplo si $(\exists\,\mathbf{a})\,\alpha$ es $(\exists\,x)\,(\exists\,y)\,\phi xyz$, β podría ser $(\exists\,y)\,\phi wyz$ $(\mathbf{b} = w)$; pero no $(\exists\,y)\,\phi yyz$ $(\mathbf{b} = y)$, ya que y no está libre en esta fórmula y tampoco $(\exists\,y)\,\phi zyz$ $(\mathbf{b} = z)$, ya que z está libre en $(\exists\,y)\,\phi xyz$. En otras palabras,

$$(\exists\,w)((\exists\,x)(\exists\,y)\,\phi xyz \supset (\exists\,y)\phi wyz)$$

es un teorema, pero

$$(\exists\,y)((\exists\,x)(\exists\,y)\,\phi xyz \supset (\exists\,y)\,\phi yyz) \quad \text{y} \quad (\exists\,z)((\exists\,x)(\exists\,y)\,\phi xyz \supset (\exists\,y)\,\phi zyz)$$

no lo son.

83 Lo que esto viene a ser es que formamos una variante alfabética ligada de una fbf, tomando algún cuantificador de α y sustituyendo la variable individual de él, junto con todas las apariciones de ese variable dentro de su ámbito (scope), por alguna otra variable individual. (A

CEP8 $\alpha \equiv \beta$, siendo α una variante alfabética ligada de β.

Como caso especial de CEP8 tenemos:

CEP9 $(\mathbf{a})\,\alpha \equiv (\mathbf{a})\,\beta$, siendo α una variante alfabética ligada de β.

Reglas de transformación derivadas

Resultan de utilidad las siguientes reglas derivadas. En ellas α y β son también fbfs cualesquiera y **a** es una variable individual:

1. La regla de la generalización universal:

GU $\vdash \alpha \rightarrow \vdash (\mathbf{a})\,\alpha$

2. Siendo α cualquier fbf que contenga a **a** libre, y β siendo α con **b** libre sustituyendo todas las apariciones de **a** libre, entonces:

$$\vdash \alpha \rightarrow \vdash \beta$$

(la prueba mediante GU y $\forall 1$).

3. $\vdash (\alpha \equiv \beta) \rightarrow \vdash ((\mathbf{a})\,\alpha \equiv (\mathbf{a})\,\beta)$

A partir de 3 y las reglas de CEP podemos derivar la siguiente regla para la sustitución de equivalentes demostrados (proved):

Eq Si $\vdash \alpha$, y β se diferencia de α solamente en que tiene alguna fbf, δ, en uno o más lugares en los que α tiene γ, entonces si $\vdash (\gamma \equiv \delta)$, $\vdash \beta$.

Demostramos ahora que toda tesis derivable de nuestra base para CEP es válida-CEP.

El esquema de axioma CP no precisa comentario, ya que todas las tesis proporcionadas por él son válidas por las mismas razones que en el propio Cálculo Proposicional.

$\forall 1$ proporciona $(\mathbf{a})\ \alpha \supset \beta$ como tesis siempre que β difiera de α solamente en tener **b** libre dondequiera que α tenga a libre. Ahora bien en cualquier modelo-CEP, si V $((\mathbf{a})\ \alpha) = 1$ entonces (mediante [V $\forall$]) V$'(\alpha)=1$ para todo V$'$ que se diferencia de V solamente en la asignación a **a**. Entre estos V$'$s habrá uno que asigne a **a** el mismo individuo que V asigna a **b**, y por tanto asigne a α el mismo valor que V asigna a β. Por consiguiente para este V$'$, V$'$ $(\alpha) =$ V (β). Pero V$'$ $(\alpha) = 1$; por tanto V$(\beta)=1$, es decir, siempre que V$((\mathbf{a})\ \alpha)=1$, V$(\beta)=1$, y por tanto $(\mathbf{a})\ \alpha \supset \beta$ es válida.

La regla de transformación $\forall 2$ proporciona $\alpha \supset (\mathbf{a})\ \beta$ como tesis siempre que $\vdash (\alpha \supset \beta)$ y **a** no esté libre en α. Demostramos que esta regla es preservadora de validez. Basta con mostrar que si $\alpha \supset \beta$ es válida también lo es $\alpha \supset (\mathbf{a})\ \beta$, siempre que **a** no esté libre en α.

Supóngase que en un determinado modelo-CEP $<$D, V$>$, V $(\alpha) = 1$. Puesto que por hipótesis $\alpha \supset \beta$ es válida, tiene el valor 1 en todos los modelos, y en particular en todo modelo $<$D, V$'>$ que difiera de $<$D, V$>$ solamente en la asignación que V$'$ hace a **a**. Puesto que **a** no aparece libre en α, tenemos V$'$ $(\alpha) =$ V $(\alpha) = 1$. De aquí puesto que V$'$ $(\alpha \supset \beta) = 1$, V$'$ $(\beta) = 1$ (para todo V$'$ que difiera de V solamente en la asignación a **a**); por tanto V$((\mathbf{a})\ \beta) = 1$. Es decir, siempre que V $(\alpha) = 1$, V $((\mathbf{a})\ \beta) = 1$, y por tanto $\alpha \supset (\mathbf{a})\ \beta$ es válida.

MP es evidentemente preservador de validez por las mismas razones que en CP. Por consiguiente, toda tesis de CEP es válida-CP.

---

este proceso a menudo se le denomina *re-escritura* (re-lettering) de una variable ligada). Intuitivamente, las variantes alfabéticas ligadas "dicen la misma cosa"; en el caso más sencillo, $(x)\,\phi x$ y $(y)\,\phi y$ significan ambas simplemente que todo es ϕ. Si α y β son variantes alfabéticas ligadas cualquier asignación de valor CEP asignará a ambas el mismo valor; es decir si V es cualquier asignación de valor CEP, V (α) = V (β).

Cálculos elementales de predicados modales

Podemos incorporar elementos modales en el CEP y obtener así cálculos de predicados análogos a los sistemas proposicionales T, S4 y S5.

El sistema que denominaremos CEP + T puede obtenerse mediante la adición a la base de CEP dada anteriormente (o a una base equivalente) de:

1. El operador primitivo L, con la regla de formación apropiada: si α es una fbf también lo es $L\alpha$.
2. Definiciones de M, $\dashv\!\exists$ y $=$ como en T.
3. Esquemas de axiomas correspondientes a los axiomas modales de T, a saber:

A5[84] $L\alpha \supset \alpha$

A6 $L(\alpha \supset \beta) \supset (L\alpha \supset L\beta)$

siendo α y β fbfs cualesquiera de CEP + T.

4. La regla de Necesariedad (Necessitation) (N): $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$

CEP + S4 es CEP + T juntamente con el esquema de axioma:

A7 $L\alpha \supset LL\alpha$

y CEP + S5 es CEP + T juntamente con el esquema de axioma:

A8 $M\alpha \supset LM\alpha$

Evidentemente nuestras reglas derivadas de T, S4 y S5 son válidas en los correspondientes cálculos de predicados, y también lo son todos sus teoremas, una vez re-establecidos como esquemas de teoremas.

No daremos ejemplos de teoremas al principio, como hicimos con los sistemas proposicionales modales, sino que demostraremos (prove) teoremas con determinadas finalidades de vez en cuando y éstos bastarán para ilustrar las técnicas de la demostración (proof).

En el caso de los sistemas proposicionales discutidos en la parte I, T parecía contener todas las fórmulas modales que deberíamos considerar intuitivamente válidas, aparte de las que dependan de las diversas leyes de reducción para modalidades reiteradas. Resulta dudoso, sin embargo, que CEP + T logre lo mismo en la lógica de predicados. Por ejemplo uno de los esquemas de teorema de CEP es

CEP1 $(\mathbf{a})(\alpha \supset \beta) \supset ((\mathbf{a})\alpha \supset (\mathbf{a})\beta)$

y su esquema análogo para la implicación estricta, a saber

$$(1)\quad (\mathbf{a})(\alpha \dashv\!\exists\, \beta) \supset ((\mathbf{a})\alpha \dashv\!\exists\, (\mathbf{a})\beta)$$

intuitivamente parece ser válido. Sin embargo (1) no es un teorema de CEP + T ni de CEP + S4 tampoco, aunque lo es de CEP + S5.

Desarrollemos esto un poco. Ampliando (1) mediante Def $\dashv\!\exists$ tenemos:

$$(2)\quad (\mathbf{a})L(\alpha \supset \beta) \supset L((\mathbf{a})\alpha \supset (\mathbf{a})\beta)$$

Esto parece una combinación de CEP1 y A6, pero lo que observamos en ello es que en el antecedente el operador modal está dentro del ámbito (scope) del cuantificador, mas en el consecuente los cuantificadores están dentro del ámbito (scope) del operador modal, y esto es lo que impide que sea derivable en CEP + T. Lo que podemos demostrar muy fácilmente en CEP + T es:

---

[84] Mantenemos la misma numeración que la de los axiomas correspondientes de T (pág. 37) puesto que los esquemas hacen la misma función que la que realizan estos axiomas junto con la regla de sustitución.

T1 $L\,(\mathbf{a})\,(\alpha \supset \beta) \supset L\,((\mathbf{a})\,\alpha \supset (\mathbf{a})\,\beta)$

(La prueba (proof) se realiza mediante CEP1 y RD1 (pág.39). Pero T1 no es (2) —en el antecedente el operador modal y el cuantificador están en el orden contrario. No obstante podríamos derivar (2) a partir de T1 mediante Sil si tuviéramos también:

$$(3)\quad (\mathbf{a})\,L\,(\alpha \supset \beta) \supset L\,(\mathbf{a})\,(\alpha \supset \beta)$$

Ahora bien (3) es simplemente un caso especial de una fórmula más general conocida frecuentemente con el nombre de *fórmula Barcan,* a saber:

FB $(\mathbf{a})\,L\,\alpha \supset L\,(\mathbf{a})\,\alpha$

Así pues si CEP+T contuviese a FB también contendría a (2); pero no las contiene, como tampoco a CEP + S4[85].

FB es una fórmula de cierta importancia que ha dado lugar a discusiones filosóficas[86]. Su nombre se deriva de Ruth C. Barcan[87], que llamó la atención sobre ella —o más exactamente sobre una fórmula que puede comprobarse es fácilmente interdeducible con ella, a saber:

$$(4)\quad M(\exists \mathbf{a})\,\alpha \dashv (\exists \mathbf{a})\,M\alpha$$

((4) se sigue de FB mediante Def M, Def $\exists$, las habituales equivalencias CP y N, y la derivación inversa es igualmente directa; en vista de ello denominamos a las dos indiferentemente, fórmula *Barcan*[88]).

Hemos demostrado que si la fórmula Barcan fuese tesis de CEP+T, (2) también lo sería. Lo inverso también es válido. Lo demostramos derivando FB, suponiendo que (2) sea una tesis, como sigue:
Si (2) es válida para todas las fbfs α y β, entonces, como caso especial, tenemos:

	(i)	$(\mathbf{a})\,L\,((\alpha \supset \alpha) \supset \alpha) \supset L((\mathbf{a})\,(\alpha \supset \alpha) \supset (\mathbf{a})\,\alpha)$
CP:	(ii)	$((\alpha \supset \alpha) \supset \alpha) \equiv \alpha$
(ii) x RD1:	(iii)	$L\,((\alpha \supset \alpha) \supset \alpha) \equiv L\,\alpha$
CP, GU:	(iv)	$(\mathbf{a})\,(\alpha \supset \alpha)$
CP:	(v)	$(\mathbf{a})\,(\alpha \supset \alpha) \supset [((\mathbf{a})\,(\alpha \supset \alpha) \supset (\mathbf{a})\,\alpha) \equiv (\mathbf{a})\,\alpha]$
(iv), (v) x MP:	(vi)	$((\mathbf{a})\,(\alpha \supset \alpha) \supset (\mathbf{a})\,\alpha) \equiv (\mathbf{a})\,\alpha$
(i), (iii), (vi) x Eq:	(vii)	$(\mathbf{a})\,L\,\alpha \supset L\,(\mathbf{a})\,\alpha$ **Q.E.D.**

Por tanto como adiciones a CEP + T, la fórmula Barcan y (2) —la implicación estricta análoga de CEP1— o sirven las dos o no sirven las dos.

La inversa de la fórmula Barcan (es decir $L\,(\mathbf{a})\,\alpha \supset (\mathbf{a})\,L\,\alpha$) es fácilmente demostrable en CEP + T tal como aparece:

T2 $L\,(\mathbf{a})\,\alpha \supset (\mathbf{a})\,L\,\alpha$

---

85 *Vide* Lemmon [1960b] e *infra* pág. 149.

86 La interpretación de esta fórmula se discute posteriormente en el capítulo 10.

87 Más tarde Mrs. J.A. Marcus. Véase su [1946] donde (4) es el axioma 11 de la pág. 18.

88 Y evidentemente, en los sistemas que contengan N y A5 es indiferente que la operación principal de una tesis sea $\supset$ o $\dashv$.

PRUEBA

1: (1) $(\mathbf{a})\,\alpha \supset \alpha$

(1) x RD1: (2) $L\,(\mathbf{a})\,\alpha \supset L\,\alpha$

(2) x ∀2: (3) $L\,(\mathbf{a})\,\alpha \supset (\mathbf{a})\,L\,\alpha$ **Q.E.D.**

(El paso (3) es legítimo ya que evidentemente **a** no puede estar libre en $L\,(\mathbf{a})\,\alpha$). Por tanto si tuviésemos la fórmula Barcan podríamos derivar fácilmente:

$$L\,(\mathbf{a})\,\alpha \equiv (\mathbf{a})\,L\,\alpha$$

y a partir de ésta mediante Def *M*, Def ∃ y equivalencias CP,

$$M\,(\exists\,\mathbf{a})\,\alpha \equiv (\exists\,\mathbf{a})\,M\,\alpha$$

Dos teoremas relacionados con esto que pueden demostrarse sin la fórmula Barcan son:

T3 $M\,(\mathbf{a})\,\alpha \supset (\mathbf{a})\,M\,\alpha$

(cuya demostración es como la de T2, pero utilizando RD3 (pág. 42) en vez de RD1) y su directamente derivada:

T4 $(\exists\,\mathbf{a})\,L\,\alpha \supset L\,(\exists\,\mathbf{a})\,\alpha$

Los inversos de T3 y T4, sin embargo, no son demostrables ni siquiera con la fórmula Barcan. Para comprobar que de acuerdo con la interpretación propuesta el inverso de T4 no es válido considérese la sencilla muestra de sustitución $L\,(\exists\,x)\phi x \supset (\exists\,x)\,L\,\phi x$, y sea ϕx "x es el número de los planetas". Entonces el antecedente es verdadero, ya que debe existir algún número que sea el número de los planetas (incluso aunque no existieran planetas en absoluto seguiría existiendo tal número, es decir 0): pero el consecuente es falso, ya que puesto que es algo contingente cuántos planetas existan no existe ningún número que *deba* ser el número de los planetas. Es igualmente fácil comprobar que el inverso de T3 no es válido (Véanse, no obstante, las págs. 166-168).

Como ya hemos indicado la fórmula Barcan no es tesis de CEP + T o de CEP + S4. No obstante es consistente con cada uno de estos sistemas y podría añadirse a cualquiera de ellos sin convertirlos en CEP + S5. Es conveniente que nos consideremos en posesión de dos versiones de cada uno de estos sistemas, una sin y otra con la fórmula Barcan como axioma. Denominaremos a la primera, como ya hemos estado haciéndolo, CEP + T y CEP + S4; y denominaremos a la segunda T + FB y S4 + FB[89]. En CEP + S5, sin embargo, la fórmula Barcan es un teorema[90]. La prueba es como sigue:

FB $(\mathbf{a})\,L\,\alpha \supset L\,(\mathbf{a})\,\alpha$

PRUEBA EN CEP + S5

∀1: (1) $(\mathbf{a})\,L\,\alpha \supset L\,\alpha$

---

89 Posteriormente consideraremos otras variantes de estos tres sistemas. Cuando deseemos referirnos a los cálculos de predicados modales sin especificar una versión particular hablaremos de "T (S4, S5) cuantificacional" o (cuando no exista posibilidad de confusión con los sistemas proposicionales) simplemente de T, S4 o S5.

90 Prior [1956]. Pero *vide infra* págs. 153-156 para una versión de CEP en la cual FB no es un teorema del S5 cuantificacional.

(1) X RD3: (2) $M(\mathbf{a})\, L\alpha \supset ML\alpha$

(2), T34 x Sil: (3) $M(\mathbf{a})\, L\alpha \supset \alpha$

(3) x ∀2: (4) $M(\mathbf{a})\, L\alpha \supset (\mathbf{a})\alpha$

(4) x RD5: (5) $(\mathbf{a})\, L\alpha \supset L(\mathbf{a})\alpha$ **Q.E.D.**

Obsérvese que todas las tesis modales y reglas usadas en la prueba anterior están en el sistema Brouweriano (*vide* pág. 59 y s.); la fórmula Barcan es, por tanto, una tesis de CEP + B (es decir, el sistema que resulta de añadir el esquema de axioma $\alpha \supset LM\alpha$ a CEP + T)[91].

La consistencia de CEP modal

No es difícil demostrar que los sistemas que hemos estado considerando son consistentes. El esbozo de la prueba es como sigue; dejamos los detalles para el lector:

Para cualquier fbf, α, de CEP modal fórmese su transform-CP de la siguiente manera:

1. Elimínense todas las apariciones de $\exists$ y = mediante el uso de las definiciones.
2. Suprímanse todos los operadores modales, cuantificadores y variables individuales.
3. Sustitúyanse todas las variables predicativas distintas por variables proposicionales distintas.

La expresión resultante, α', será una fbf de CP. Un repaso demostrará que la transform-CP de todo axioma de T + FB, S4 + FB y CEP + S5 es una fbf *válida* de CP. Más aún, si β se obtiene mediante MP a partir de dos fbfs, α y $\alpha \supset \beta$, cada una de las cuales tiene una transform-CP válida, entonces la transform-CP de β será válida también; si $L\alpha$ se obtiene mediante N a partir de una fbf α con una transform-CP válida, entonces la transform-CP de $L\alpha$, al ser idéntica a la de α, evidentemente será válida también; y para ∀2 la situación es parecida. Por tanto la transform-CP de todas las tesis de T + FB, S4 + FB o CEP + S5 es válida; y de esto se sigue la consistencia de estos sistemas, del modo que se explicó para T en la pág. 45 y ss.

La validez en CEP modal

Daremos ahora definiciones de validez en T + FB, S4 + FB y CEP + S5[92]. Esencialmente nuestro procedimiento consistirá en combinar las definiciones de validez de los sistemas proposicionales dadas en el capítulo IV con la de CEP dada anteriormente en este capítulo. Posteriormente daremos otras definiciones para sistemas sin la fórmula Barcan.

Comenzamos definiendo un modelo T + FB. Tal modelo consiste en un cuádruple ordenado <MU, R, D, V> siendo MU un conjunto de "mundos" (en el sentido del capítulo IV). R es una relación reflexiva para todos los miembros de MU, D es un conjunto (o dominio) de individuos, y V es una asignación de valor que **satisface** las condiciones que ahora explicaremos.

---

91 Prior [1967] pág. 146 declara que la primera prueba de esto se debe a E.J. Lemmon.

92 Las definiciones que seguirán son adaptadas de las de Kripke [1963b]. Kripke, sin embargo, presupone un distinto dominio de individuos para cada mundo y como consecuencia obtiene una semántica que no hace válida, como la nuestra lo hace, la fórmula Barcan; *vide infra*, págs. 153-156. *Vide* también Hintikka [1961] y Bayart [1958].

Deseamos que cualquier asignación de valor particular, V, nos permita calcular un valor (1 ó 0) para cualquier fbf de CEP modal en cualquier mundo dado. Y al igual que en los sistemas proposicionales de la I parte dejábamos que las variables proposicionales tomasen distintos valores en distintos mundos, de igual modo ahora deseamos permitir que las fórmulas atómicas tomen distintos valores en distintos mundos. Podemos lograrlo del modo siguiente:

Como en el caso de CEP no modal hacemos que V asigne algún miembro, u, de D a cada variable individual (Aquí también escribimos "V $(x) = u$" para "V asigna u a x" y así sucesivamente). Esta vez, sin embargo, no podemos permitir que el valor de una variable predicativa n-ádica, ϕ, sea simplemente un conjunto de n-múltiplos de miembros de D, y luego definir el valor de una fórmula atómica como antes, ya que esto daría como resultado que todas las fórmulas atómicas tuviesen el mismo valor en todos los mundos. Lo que haremos en lugar de ello es, para toda ϕn-ádica, hacer que V (ϕ) sea un conjunto de $(n + 1)$-múltiplos ordenados, cada uno de ellos de la forma $<u_1, ..., u_n, mu_i>$, siendo el caso que cada uno de los miembros de $u_1, ..., u_n \in$ D y $mu_i \in$ MU. Dado V (x_k) para toda variable individual x_k y V (ϕ) para toda variable predicativa ϕ, podemos entonces calcular V (α, mu_i) para toda fbf α y todo $mu_i \in$MU mediante las siguientes reglas, que son, evidentemente, adaptación de las de T proposicional y CEP.

1. Para fórmulas atómicas: Si ϕ es una variable predicativa n-ádica, entonces V $(\phi (x_1, ..., x_n), mu_i) = 1$ si $<$V (x_1), ..., V (x_n), $mu_i > \in$ V (ϕ). De lo contrario V $(\phi (x_1, ..., x_n), mu_i) = 0$.
2. [V $\sim$]. Para cualquier fbf α y cualquier $mu_i \in$ MU, V $(\sim \alpha, mu_i) = 1$ si V $(\alpha, mu_i) = 0$. De lo contrario V $(\sim \alpha, mu_i) = 0$.
3. [V $\vee$]. Para fbfs cualesquiera α y β y cualquier $mu_i \in$MU, V $((\alpha \vee \beta), mu_i = 1$, si o bien V $(\alpha, mu_i) = 1$ o V $(\beta, mu_i) = 1$. De lo contrario V$((\alpha \vee \beta), mu_i) = 0$.
4. [V $\forall$]. Para cualquier fbf α, cualquier variable individual **a** y cualquier $mu_i \in$MU, V $((\mathbf{a})\, \alpha, mu_i) = 1$ si para toda asignación T + FB, V$'$, que haga la misma asignación que hace V a todas las variables que no sean **a**, V$'$ $(\alpha, mu_i) = 1$. De lo contrario V $((\mathbf{a})\, \alpha, mu_i) = 0$.
5. [V L]. Para cualquier fbf α y cualquier $mu_i \in$ MU, V $(L\, \alpha, mu_i) = 1$ si para todo $mu_j \in$MU tal que $mu_i R mu_j$, V $(\alpha, mu_j) = 1$. De lo contrario V $(L\alpha, mu_i) = 0$.

Podemos definir ahora la validez para T + FB diciendo que una fbf, α, es válida-T + FB SI para todo modelo-T + FB $<$MU, R, D, V$>$, V $(\alpha, mu_i) = 1$, para todo $mu_i \in$MU.

Para S4 + FB añadimos el requisito de que R sea transitiva, y para CEP + S5 el de que sea transitiva y simétrica. Las definiciones de modelos y validez son en lo demás las mismas que para T + FB.

Todas las tesis de los sistemas axiomáticos T + FB, S4 + FB y CEP + S5 son válidas de acuerdo con estas definiciones. La prueba de ello se realiza siguiendo el método habitual de demostrar que todos los axiomas son válidos y que las reglas preservan la validez.

Que CP y los esquemas de axiomas modales A5-A8 son válidos[93] puede comprobarse realizando pruebas análogas a las de los sistemas proposicionales en las págs. 67 y s., pero teniendo en cuenta fórmulas CEP. Lo mismo aplica a la preservación de validez de las reglas MP y N.

[93] Decir que un *esquema* de axioma es válido es decir que toda fbf que sea una muestra de él es válida.

La validez de $\forall_1$ y $\forall_2$ puede demostrarse mediante adaptación directa de las pruebas de CEP no modal de la pág. 124.

Nos queda solamente la fórmula Barcan, (**a**) $L\,\alpha\,L$ (**a**) α. Supóngase que para algún mundo, mu_i en un modelo T + FB, V ((**a**) $L\,\alpha$, mu_i) = 1. Hágase que V′ difiera de V solamente en la asignación a **a** y sea mu_j cualquier mundo tal que mu_i R mu_j.

Entonces (mediante [V ∀]):

$$V'(L\,\alpha, mu_i) = 1, \text{ para todo } V'.$$

De aquí (mediante [V L]):

$$V'(\alpha, mu_j) = 1, \text{ para todo } V' \text{ y para todo } mu_j.$$

De ahí (mediante [V ∀]):

$$V((\mathbf{a})\,\alpha, mu_j) = 1, \text{ para todo } mu_j.$$

De ahí finalmente (mediante [V L]):

$$V(L\,((\mathbf{a})\,\alpha), mu_i) = 1.$$

Por tanto la fórmula Barcan es válida T + FB (y por ello desde luego válida S4 + FB y CEP + S5 también).

En el próximo capítulo demostraremos que los sistemas axiomáticos son también completos con relación a nuestra definición de validez; es decir, que para cualquier fbf, α, si α es válida-T + FB (S4 + FB, CEP + S5), entonces α es una tesis de T + FB (S4 + FB, CEP + S5).

El CEP modal monádico

Mencionamos en la pág. 122 que aunque el CEP no modal no es un sistema decidible sin embargo ciertas partes de él son decidibles. De ellas la más famosa es el Cálculo Elemental de Predicados Monádico, es decir aquella parte del CEP en la que todas las variables predicativas son monádicas. En vista de ello podríamos contar con que el CEP modal monádico fuese igualmente un sistema decidible. Sin embargo Kripke ha demostrado[94] que no es así. Su prueba depende de la conclusión habitual (standard) del CEP no modal de que la parte que no contiene variables predicativas excepto una sola diádica (supongamos ϕ) es indecidible[95]. Denominemos a esta parte el *CEP solamente diádico*. En resumen, el método de Kripke intenta demostrar que si tomamos cualquier fbf, α, de este cálculo y en ella sustituimos todas las expresiones de la forma $\phi\mathbf{ab}$ (siendo **a** y **b** variables individuales cualesquiera) por $M(\psi\mathbf{a} \cdot \chi\mathbf{b})$, obtenemos una fbf del CEP modal monádico, α', que es tal que α es válida SI α es válida. De esto se sigue que si el CEP solamente diádico es indecidible también lo es el CEP modal monádico –y por supuesto también incluso aquella parte todavía más reducida del CEP modal en la que no aparecen más de dos variables predicativas monádicas. Esta conclusión de Kripke es válida para CEP + S5 y para todos los sistemas del CEP modal allí contenidos.

---

94 La prueba aparece en Kripke[1962], que también contiene una discusión de un aparente procedimiento de decisión en Poliferno [1961].

95 Kalmar [1936]. (*Vide* Church 1956 págs. 272-279).

CAPITULO IX

LA COMPLETITUD DEL CEP MODAL

En 1949 Leon Henkin[96] publicó una prueba de completitud para el CEP que, aunque bastante complicada, era más sencilla que ninguna de las que habían aparecido con anterioridad. Denominaremos a cualquier prueba de completitud (ya sea para CEP o para cualquier otro sistema) que utilice los mismos principios generales que utiliza Henkin, *prueba Henkin*. Más avanzado este capítulo utilizaremos pruebas de este tipo para demostrar la completitud de T + FB, S4 + FB y CEP + S5.

Las Pruebas Henkin pueden ser aplicadas a CEP y a sistemas proposicionales modales tales como T, S4 y S5[97] y la introducción más directa a este asunto es demostrar antes de nada cómo funcionan las mencionadas pruebas en estos sistemas más sencillos. El lector se encontrará entonces en mejor situación para poder estudiar los casos más complicados del Cálculo de Predicados.

La estructura general de una prueba Henkin

La primera noción que introduciremos será la de la *consistencia de una fórmula* con relación a un sistema determinado. Ya nos hemos encontrado antes con la noción de consistencia de un *sistema*. La presente noción, aunque relacionada con aquélla, es un tanto diferente. Se dice que una fórmula α de un sistema S es *consistente con relación a S* (o, cuando no hay posibilidad de confusión, simplemente *consistente*) SI $\sim\alpha$ no es una tesis de S[98]. Esto es tanto como decir que la negación de una tesis se considera como inconsistente (es decir no consistente), pero que todas las demás fórmulas se consideran consistentes. Por extensión decimos que un conjunto finito $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de fórmulas de S es consistente SI

$$\dashv_S \sim(\alpha_1, ..., \alpha_n)^{99}$$

---

96 Henkin [1949].

97 El propio Henkin menciona esto por lo que al CP se refiere. Señala también, sin embargo, que han de preferirse las pruebas habituales de completitud para CP, puesto que, a diferencia de la suya propia, comienzan por un procedimiento de decisión y muestran cómo construir, para cualquier fbf α que resulte válida según ese procedimiento de decisión, una derivación de α a partir de la base axiomática. Nuestras propias pruebas de completitud para T, S4 y S5 de los Capítulos 5 y 6 también han sido de este tipo. Por supuesto se han de preferir estas pruebas siempre que podamos tenerlas; pero para CEP (y sus extensiones modales) no se puede contar con ellas, puesto que, como Church demostró en [1936] CEP no es un sistema decidible. Las pruebas de completitud para los sistemas CEP se pueden basar de hecho en los métodos de los Capítulos 5 y 6 (utilizando cuadros semánticos), aunque estos métodos no proporcionan desde luego un procedimiento de decisión en tales casos.

98 Esta explicación de la consistencia presupone el que S contenga un operador de negación identificable – requisito cumplido por todos los sistemas que consideraremos aquí. El por qué de la utilización del término "consistente" debe quedar suficientemente aclarado.

99 Esto presupone que S contenga un operador de conjuncion identificable.

(Aquí "$\dashv_S \alpha$" es una abreviatura conveniente para "α no es una tesis de S"). Finalmente si Λ es un conjunto infinito de fórmulas diremos que Λ es consistente SI no contiene ningún subconjunto finito de fórmulas inconsistente, es decir ningún subconjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ tal que

$$\vdash_S \sim(\alpha_1, ..., \alpha_n\}$$

La relación entre consistencia en este sentido y completitud es como sigue: Demostrar que un sistema, S, es completo es demostrar que si cualquier fórmula α es válida-S, entonces $\vdash_S \alpha$; o, lo que viene a ser lo mismo, que si $\dashv_S \alpha$, entonces α no es válida-S. Ahora bien $\dashv_S \alpha$ SI $\sim\alpha$ es consistente (con relación a S); y un método para demostrar que α no es válida-S consiste en construir un modelo-S falsificador (falsifying) para α (es decir, uno en el que V $(\alpha) = 0$) —que será, desde luego un modelo-S verificador (verifying) para $\sim\alpha$ (es decir uno en el que V $(\sim\alpha) = 1$)[100]. Por tanto, otro modo de demostrar que S es completo es mostrar que para toda fórmula consistente de S existe un modelo-S verificador.

Y esto es esencialmente lo que la prueba Henkin demuestra acerca de un sistema. Lo hace demostrando (a) que si α es cualquier fórmula consistente de un sistema S podemos construir un tipo especial de conjunto de fórmulas de S denominado conjunto *máximamente consistente*, que contiene α; y (b) que podemos entonces formar un modelo-S que verifica (verifies) todas las fromulas del conjunto y por tanto *inter-alia* la propia α.

Conjuntos máximamente consistentes

Hemos definido el término "consistente" aplicado a un conjunto de fórmulas. Pero, evidentemente, existirán conjuntos consistentes de fórmulas que serán en cierto sentido incompletos en el sentido de que existen fórmulas que no aparecen en ellos que podrían ser consistentemente añadidas a ellos. Considérese, por ejemplo, el conjunto $\{p, p \supset q, r\}$. No podríamos añadir consistentemente $\sim p$ a este conjunto (suponiendo que S contenga CP), porque entonces resultaría $\{p, \sim p, p \supset q, r\}$, y puesto que $\vdash \sim (p \cdot \sim p \cdot (p \supset q) \cdot r)$, este conjunto resultaría inconsistente. Pero *podríamos* añadir consistentemente por ejemplo s o $\sim s$ (aunque no ambas) o $(p \cdot q)$ o $(p \cdot r)$ o un número infinito de otras que fuesen adecuadamente seleccionadas. Tales fórmulas, diremos que son *consistentes con* el conjunto original, aunque no *en* él. Ahora bien un *conjunto máximamente consistente* de fórmulas es un conjunto *consistente* que no es incompleto en el sentido que hemos explicado; es decir, es aquél para el cual cualquier fórmula que no aparezca en él, si se añadiese, haría que el conjunto se volviese inconsistente. En otras palabras, un conjunto de fórmulas de S es máximamente consistente SI es consistente y toda fórmula de S que no esté en él es inconsistente con él.

Lo primero que tenemos que demostrar es que si se nos da una fórmula consistente, α (o un conjunto consistente de fórmulas Λ) de S, podemos siempre construir un conjunto máximamente consistente, Γ, que contenga α (o Λ).

Para hacer esto suponemos que todas las fórmulas de S están dispuestas de acuerdo con cierto tipo de orden determinado, de modo que podamos hablar de 1.ª, 2.ª, ... $n.^a$ fórmula de S[101].

---

100 En el caso de los sistemas modales, un sistema falsificador para α será aquél en el que para algún $mu_i \in$ MU, V (α, mu_i) 0, y un modelo verificador para $\sim\alpha$ aquél en el que para algún $mu_i \in$ MU, V$(\sim\alpha, mu_i) = 1$.

101 Debe quedar claro que para este fin podría utilizarse algo análogo a la ordenación alfabética de un diccionario.

Denominemos a estas fórmulas, α_1 , α_2, ..., α_n, ..., respectivamente. Entonces formamos Γ empezando con α [102] (o Λ) y recorremos luego todas las fórmulas de S en el orden que hemos elegido, añadiendo cada una cuando corresponda SI podemos hacerlo consistentemente.

Para expresar esto más estrictamente: Construimos Γ formando una serie de conjuntos, $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_n, ...$, del modo siguiente. Γ_0 es $\{\alpha\}$ [103]. Para formar Γ_1 tomamos α_1 (la primera fórmula de S en el orden elegido) y si α_1 es consistente con Γ_0 (es decir, si $\dashv_S \sim(\alpha \cdot \alpha_1)$) entonces hacemos que Γ_1 sea $\{\alpha, \alpha_1\}$, pero si no lo es entonces hacemos simplemente que Γ_1 sea el propio Γ_0. Formamos cada conjunto siguiente en la serie de modo análogo: dado Γ_n, formamos Γ_{n+1} tomando α_{n+1} y si $\Gamma_n \cup \{\alpha_{n+1}\}$ –es decir el conjunto consistente en todos los miembros de Γ_n junto con α_{n+1}– es consistente, entonces hacemos que Γ_{n+1} sea este conjunto, pero si no lo es entonces hacemos que Γ_{n+1} sea Γ_n. Finalmente hacemos que Γ sea el conjunto de todas las fórmulas que están en cualquier conjunto de la serie $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_n, ...$

Ahora bien, evidentemente cada conjunto de esta serie es consistente; ya que Γ_0 ($\{\alpha\}$) es consistente por hipótesis y cada Γ_{n+1} es consistente si Γ_n lo es De ello se sigue que el propio Γ es consistente. Pues, sea Λ cualquier subconjunto finito de Γ, y sea α_n la última fórmula (en la ordenación elegida) de Λ. Entonces Λ es un subconjunto de Γ_n. Pero Γ_n es consistente y cualquier subconjunto de un conjunto consistente debe ser también consistente. Por tanto Γ no contiene ningún subconjunto finito inconsistente, y es él mismo, por ello, consistente.

Más aún, Γ es máximo (maximal), ya que, considérese cualquier fórmula que sea consistente con Γ. Sea ésta α_m –es decir, el m° en la ordenación elegida. Puesto que α_m es consistente con Γ, es consistente con cualquier subconjunto de Γ, y en particular con Γ_{m-1}. Por tanto en la construcción de Γ habrá sido añadida a Γ_{m-1} para formar Γ_m y por ello estará en Γ.

De este modo para cualquier fórmula consistente α de S podemos construir un conjunto máximamente consistente Γ que contenga α.

Algunas propiedades de los conjuntos máximamente consistentes

Supongamos que nuestro sistema S contiene alguna versión axiomática adecuada de CP, tal con PM (pág.27 y s.). Todos los sistemas con los que trataremos presentan en realidad este aspecto. Podemos entonces demostrar los siguientes lemas.

LEMA 1

Si Γ es máximamente consistente con relación a S, entonces para cualquier fbf α, α y $\sim\alpha$ no están ambas en Γ.

PRUEBA

Si α y $\sim\alpha$ están ambas en Γ, entonces $\{\alpha, \sim\alpha\}$ es un subconjunto de Γ. Por tanto, puesto que Γ es consistente, $\{\alpha, \sim\alpha\}$ es consistente, es decir

$$\dashv_S \sim(\alpha \sim\alpha)$$

Pero esto es falso, ya que, puesto que S contiene a CP

$$\vdash_S \sim(\alpha \cdot \sim\alpha)$$

para cada fbf α. Por tanto α y $\sim\alpha$ no están ambas en Γ.

---

102 Con más exactitud, $\{\alpha\}$– el conjunto cuyo único miembro es α

103 O Λ – y de modo semejante en lo que sigue.

LEMA 2

Si Γ es máximamente consistente, con relación a S, entonces para cualquier fbf α, o bien $\alpha \in \Gamma$ o $\sim\alpha \in \Gamma$.

PRUEBA

Supóngase que ni $\alpha \in \Gamma$ ni $\sim\alpha \in \Gamma$. Entonces, puesto que Γ es máximo (maximal) para algún subconjunto finito Γ_i de Γ, $\Gamma_i \cup \{\alpha\}$ es consistente, y para algún subconjunto finito de Γ_i de Γ, $\Gamma_i \cup \{\sim\alpha\}$ es inconsistente; es decir, asignando 'β' a la conjunción (conjunction) de todas las fbfs en Γi y 'γ' para la conjunción (conjunction) de todas las fbfs en Γ_j'.

$$\vdash_S \sim(\beta \cdot \alpha)$$

y

$$\vdash_S \sim(\gamma \cdot \sim\alpha)$$

de donde, mediante $\vdash \sim(p \cdot q) \supset (\sim(r \cdot \sim q) \supset \sim(p \cdot r))$ (ya que S contiene a CP),

$$\vdash_S \sim(\beta \cdot \gamma)$$

Pero esto significa que $\Gamma_i \cup \Gamma_j$ es inconsistente y, por tanto, puesto que $\Gamma_i \cup \Gamma_j$ es un subconjunto finito de Γ, que el propio Γ es inconsistente, contrariamente a la hipótesis.

Es un simple corolario del Lema 2 que toda tesis es un conjunto máximamente consistente. Ya que si $\vdash \alpha$, entonces $\sim\alpha$ es inconsistente y por tanto no puede estar en ningún conjunto consistente. Por ello si Γ es máximamente consistente, $\sim\alpha$ no está en Γ y por tanto (de acuerdo con el Lema 2) α lo está.

LEMA 3

Si Γ es máximamente consistente con relación a S, entonces para cualesquiera fbfs α y β, si $\alpha \in \Gamma$ y $(\alpha \supset \beta) \in \Gamma$, $\beta \in \Gamma$.

PRUEBA

Supongamos que α y $(\alpha \supset \beta)$ estuviesen en Γ pero β no estuviese. Entonces (de acuerdo con el Lema 2) $\sim\beta$ estaría en Γ, y por tanto $\{\alpha, (\alpha \supset \beta), \sim\beta\}$ sería un subconjunto de Γ. Pero, puesto que S contiene a CP, tenemos:

$$\vdash_S \sim(\alpha \cdot (\alpha \supset \beta) \cdot \sim\beta)$$

Por tanto el subconjunto en cuestión, y por ello el propio Γ, serían inconsistentes, lo cual según la hipótesis no ocurre así.

Puesto que, según el corolario del Lema 2, si $\vdash (\alpha \supset \beta)$ entonces $(\alpha \supset \beta)$ está en todo conjunto máximamente consistente, tenemos el siguiente corolario del Lema 3, cuya prueba es evidente:

Si Γ es máximamente consistente con relación a S, entonces para cualesquiera fbfs α y β, si $\alpha \in \Gamma$ y $\vdash_S (\alpha \supset \beta)$, $\beta \in \Gamma$.

Este corolario aunque más débil (weaker) que el Lema 3, es a menudo más útil en la práctica que el propio Lema. Denominaremos a ambos, el Lema y el corolario, simplemente, el *Lema* 3.

La completitud de PM

Supongamos que deseamos demostrar que el sistema axiomático PM es completo para CP. A la luz de lo ya visto, esto se llevará a cabo si conseguimos demostrar que para cualquier fbf α que sea consistente con respecto a PM existe una asignación CP, V, tal que $V(\alpha) = 1$.

Hemos mostrado cómo, dado que α es consistente, podemos construir un conjunto máximamente consistente, Γ, que contiene α. En el presente caso presu-

ponemos que α es consistente con respecto a PM y hacemos a Γ máximamente consistente también con respecto a PM. Una vez construido Γ hacemos la siguiente asignación de valor CP, V: a cada variable proposicional p_i le asignamos 1 si es una de las fbfs de Γ y 0 si no lo es; los valores asignados a todas las demás fbfs pueden calcularse mediante las reglas ordinarias (standard) CP para $\sim$ y $\vee$, dadas en la pág. 22 ([V $\sim$] y [V $\vee$]).

Establecemos ahora el siguiente teorema:

TEOREMA 1

Dada V *tal como la definimos anteriormente, para toda fbf CP,* β, V (β) = 1 *o* 0 *según* $\beta \in \Gamma$ *o no.*

(Expresado de un modo menos formal, lo que el Teorema 1 establece es que si Γ es máximamente consistente con respecto a PM, entonces el asignar 1 a todas las *variables* de Γ (y 0 a todas las demás) da como resultado asignar 1 a todas las *fbfs*, sin excepción, de Γ (y 0 a todas las demás).

Evidentemente, puesto que, por hipótesis, nuestra fórmula original consistente α está en Γ, se seguirá del Teorema 1 que V (α) = 1, y que la completitud de PM quedará de este modo establecida.

Demostramos el Teorema 1 mediante inducción en la construcción de las fórmulas CP.

1. Si β es una variable proposicional, el teorema es válido para β de acuerdo con la asignación de valor inicial a las variables proposicionales.

2. Si el teorema es válido para una fbf β (hipótesis de inducción) entonces también es válido para $\sim \beta$. Ya que (a) si $\sim \beta \in \Gamma$ entonces (de acuerdo con el Lema 1)[104] $\beta \notin \Gamma$ (es decir β no está en Γ); de aquí que (de acuerdo con la hipótesis de inducción) V (β) = 0; y de aquí V ($\sim\beta$) = 1. Y (b) si $\sim\beta \notin \Gamma$ entonces (de acuerdo con el Lema 2) $\beta \in \Gamma$; de aquí que (de acuerdo con la hipótesis de inducción) V (β) = 1; y de aquí V ($\sim\beta$) = 0.

3. Si el teorema es válido para β y para γ (hipótesis de inducción), entonces también es válido para ($\beta \vee \gamma$).

(a) Supongamos que ($\beta \vee \gamma$) $\in \Gamma$. En ese caso o bien $\beta \in \Gamma$ o $\gamma \in \Gamma$, por la razón siguiente: si ni $\beta \in \Gamma$ ni $\gamma \in \Gamma$ entonces (de acuerdo con el Lema 2) $\sim\beta \in \Gamma$ y $\sim\gamma \in \Gamma$, y por tanto (de acuerdo con el Lema 3) puesto que $\vdash_{PM} (\sim\beta \supset (\sim\gamma \supset \sim(\beta \vee \gamma)))$, $\sim(\beta \vee \gamma) \in \Gamma$; pero entonces (de acuerdo con el Lema 1), ($\beta \vee \gamma$) $\notin \Gamma$, lo cual contradice la suposición original. Por tanto si ($\beta \vee \gamma$) $\in \Gamma$, entonces o bien $\beta \in \Gamma$ o $\gamma \in \Gamma$. Ahora bien si $\beta \in \Gamma$, entonces (de acuerdo con la hipótesis de inducción) V (β) = 1, y por tanto V ($\beta \vee \gamma$) = 1; y de igual modo si $\gamma \in \Gamma$, V (γ) = 1, y por tanto una vez más V ($\beta \vee \gamma$) = 1.

(b) Supongamos que ($\beta \vee \gamma$) $\notin \Gamma$. Entonces (de acuerdo con el Lema 2) $\sim(\beta \vee \gamma) \in \Gamma$; por tanto (de acuerdo con el Lema 3) puesto que $\vdash_{PM} (\sim(\beta \vee \gamma) \supset \sim\beta)$ y $\vdash_{PM} (\sim(\beta \vee \gamma) \supset \sim\gamma)$, $\sim\beta \in \Gamma$ y $\sim\gamma \in \Gamma$; y por tanto a su vez (de acuerdo con el Lema 1) $\beta \notin \Gamma$ y $\gamma \notin \Gamma$. De acuerdo con la hipótesis de inducción tenemos entonces V (β) = 0 y V (γ) = 0, y por tanto V ($\beta \vee \gamma$) = 0.

Puesto que toda fbf del CP (en notación primitiva) es o bien una variable proposicional o de lo contrario está formada a partir de variables proposicionales mediante $\sim$ y $\vee$, de acuerdo con las reglas de formación, el Teorema 1 es válido para toda fbf de CP.

---

104 Para demostrar la completitud de PM necesitamos por supuesto convencernos de que las tesis CP requeridas para demostrar los Lemas 1-3 *son* realmente derivables en PM.

La completitud de T, S4 y S5

Mostramos ahora cómo dar una prueba Henkin de la completitud de T. El principio general de la prueba es el mismo que antes: demostramos que si α es una fórmula cualquiera, que sea consistente con respecto a T, podemos construir un modelo-T verificador (verifying) para α, es decir un modelo-T $<$MU, R, V$>$ en el cual para algún $mu_i \in$ MU, V $(\alpha, mu_i) = 1$[105].

Como preliminar demostramos el siguiente Lema que es válido en todos los sistemas que contengan T.

LEMA 4

Cuando β, γ_1, ..., γ_n son fbfs cualesquiera, si $\{L\,\gamma_1, ..., L\,\gamma_n, M\,\beta\}$ es consistente, entonces $\{\gamma_1, ..., \gamma_n, \beta\}$ es consistente.

PRUEBA

La prueba se lleva a cabo demostrando que si $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\ \beta\}$ es inconsistente entonces también lo es $\{L\,\gamma_1, ..., L\,\gamma_n, M\beta\}$.

Supóngase que $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\ \beta\}$ es inconsistente, es decir que $\vdash \sim(\gamma_1 \cdots \gamma_n \cdot \beta)$. Entonces mediante N e ILM:

$$(1) \quad \vdash \sim M(\gamma_1 \ldots\ldots \gamma_n \cdot \beta)$$

Pero la sustitución en T17 (× Imp) nos da:

$$(2) \quad \vdash (M\,\beta \cdot L\,(\gamma_1 \ldots\ldots \gamma_n)) \supset M\,(\beta \cdot \gamma_1 \ldots\ldots \gamma_n)$$

(1) y (2) de acuerdo con CP nos proporcionan:

$$\vdash \sim(M\,\beta \cdot L\,(\gamma_1 \ldots\ldots \gamma_n))$$

Por tanto de acuerdo con T3:

$$\vdash \sim(M\,\beta \cdot L\,\gamma_1 \ldots\ldots L\,\gamma_n)$$

y por ello $\{L\,\gamma_1, ..., L\,\gamma_n, M\,\beta\}$ es inconsistente. **Q.E.D.**

Para una prueba Henkin de la completitud de T tenemos que demostrar cómo construir no un simple conjunto máximamente consistente, sino un sistema completo de tales conjuntos, empezando por una fórmula consistente dada α. Utilizamos el símbolo Γ esta vez para referirnos a este sistema completo y a los conjuntos máximamente consistentes que lo componen les denominamos Γ_1, ..., Γ_i, ...

Primero construimos Γ_1 tomando $\{\alpha\}$ como aquel conjunto inicial y haciendo a Γ_1 máximamente consistente (con respecto a T) del modo ya descrito. Una vez construido Γ_1 construimos entonces para cada Γ_i en Γ (incluyendo el propio Γ_1) nuevos conjuntos máximamente consistentes de acuerdo con el siguiente plan: Para cada fbf de la forma $M\,\beta$[106] en Γ_i construimos un conjunto máximamente consistente Γ_j, tomando como Γ_{j0} (es decir el conjunto inicial para Γ_j) el conjunto que consista en β junto con toda fbf γ tal que $L\,\gamma \in \Gamma_i$. Es decir, iniciamos Γ_j tomando los argumentos de *una* aparición (occurrence) de M y de *todas* las apariciones de L en Γ_i, y luego hacemos a Γ_j máximamente consistente recorriendo las fbfs de T del modo descrito anteriormente. Esto presupone que Γ_{j0} es él mismo consistente, pero este presupuesto se justifica fácilmente del siguiente modo: Sea

---

105 Cf. Kaplan [1966], pág. 122 (comentario de Kripke [1963a], y Makinson [1966c].

106 Es decir $\sim L \sim \beta$ (sin abreviar).

$\{\gamma_1, ..., \gamma_n, \beta\}$ un subconjunto finito[107] de Γ_{j0}. Ahora bien $L\,\gamma_1, ..., L\,\gamma_n$ y $M\,\beta$ están todos ellos en Γ_i; y puesto que Γ_i es consistente, por hipótesis, $\{L\,\gamma_1, ..., L\,\gamma_n, M\beta\}$ es consistente. Por tanto de acuerdo con el Lema 4 $\{\gamma_1, ..., \gamma_n, \beta\}$ es consistente. De este modo todo subconjunto finito de Γ_{j0} es consistente; es decir, Γ_{j0} es consistente.

Si Γ_j se forma a partir de Γ_i del modo que acabamos de describir, decimos que Γ_j es un *subordinado* de Γ_i.

Γ, entonces, es el sistema de conjuntos máximamente consistentes, que se forma partiendo de algún conjunto máximamente consistente Γ_1 y construyendo un conjunto subordinado para cada fbf de la forma $M\,\beta$ en cada conjunto de Γ. (Obsérvese que Γ contendrá un número infinito de conjuntos).

Resumiendo: El sistema completo Γ tiene las siguientes propiedades: para cada Γ_i de Γ,

1. Γ_i es máximamente consistente.

2. Para cada $M\,\beta \in \Gamma_i$ existe un conjunto máximamente consistente subordinado, Γ_j, tal que $\beta \in \Gamma_j$ y para cada $L\,\gamma \in \Gamma_i$, $\gamma \in \Gamma_j$.

Podemos formar fácilmente un modelo-T $<$MU, R, V$>$ sobre la base de Γ. Con cada Γ_i de Γ asociamos un "mundo" de nuestro modelo (Para mayor simplicidad podemos denominar a los mundos asociados con Γ_i, Γ_j, etc., mu_i, mu_j, etc., respectivamente). Sea MU el conjunto de todos esos mundos. Sea R la relación tal que $mu_i R mu_j$, SI, o bien Γ_j es un subordinado de Γ_i o de lo contrario Γ_j es el propio Γ_i. Sea V el siguiente valor de asignación: para cada variable proposicional p_k y para cada $mu_i \in$ MU, V $(p_k, mu_i) = 1$ ó 0 según $p_k \in \Gamma_i$ o no; y para $\sim$, $\vee$ y L V se ajusta a las condiciones ordinarias (standard) de una asignación-T, a saber, [V $\sim$], [V$\vee$] y [V L]. Queda claro entonces que $<$MU, R, V$>$ es un modelo-T.

Establecemos ahora un teorema que es para T lo que el Teorema 1 es para PM.

TEOREMA 2

Dados MU, R *y* V, *tal como se definieron anteriormente, para toda fbf* β, *de T y para todo* $mu_i \in$ MU, V $(\beta, mu_i) = 1$ *ó* 0, *según* $\beta \in \Gamma_i$ *o no.*

Puesto que nuestra fórmula consistente inicial, α, está en Γ_1, se seguirá del Teorema 2 que existe algún $mu_i \in$ MU (a saber mu_1) para el cual V $(\alpha, mu_i) = 1$, quedando así establecida la completitud de T.

El Teorema 2 se prueba mediante inducción en la construcción de fbfs de T. Para las variables, $\sim$ y $\vee$ la prueba es como la del Teorema 1, con evidentes modificaciones. Queda por demostrar, por tanto:

Si el Teorema 2 es válido para una fbf β (hipótesis de inducción), entonces es válido para $L\,\beta$.

PRUEBA

(a) Supongamos $L\beta \in \Gamma_i$. Entonces para cada Γ_j subordinado a Γ_i, $\beta \in \Gamma_j$ (mediante construcción de Γ_j); por tanto (de acuerdo con la hipótesis de inducción) V $(\beta, mu_j) = 1$. Más aún, (de acuerdo con el Lema 3) puesto que $\vdash_T (L\,\beta \supset \beta), \beta \in \Gamma_i$ y así (de acuerdo con la hipótesis de inducción) V $(\beta, mu_i) = 1$. De este modo para todo mu_j tal que $mu_i R mu_j$, V $(\beta, mu_j) = 1$; de aquí que V $(L\,\beta, mu_i) = 1$.

(b) Supongamos que $L\,\beta \notin \Gamma_i$. Entonces (de acuerdo con el Lema 2) $\sim L\,\beta \in \Gamma_i$,

[107] Por supuesto, β no estará en todo subconjunto de Γ_{j0}; pero evidentemente si $\{\gamma_1, \ldots \gamma_n, \beta\}$ es consistente también lo es $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

y por tanto puesto que $\vdash_T (\sim L\,\beta \supset M \sim \beta)$, $M \sim \beta \in \Gamma_i$. Por consiguiente (de acuerdo con la construcción de Γ) existe algún Γ_j subordinado de Γ_i tal que $\sim\beta \in \Gamma_j$, y por consiguiente (de acuerdo con el Lema 1) $\beta \notin \Gamma_j$. De aquí que (de acuerdo con la hipótesis de inducción) V $(\beta, mu_j) = 0$. Es decir, para algún mu_j tal que $mu_i R mu_j$, V $(\beta, mu_j) = 0$, y por ello, V $(L\,\beta, mu_i) = 0$.

Por tanto el Teorema 2 es válido para toda fbf de T.

Para demostrar la completitud de S4 de acuerdo con este método procedemos como con T, pero con las siguientes excepciones: Cada Γ_i en Γ ha de ser ahora máximamente consistente con respecto a S4; y modificamos la relación que dábamos de R, de modo que $mu_i R mu_j$ SI Γ_j es un subordinado$_*$[108] de Γ_i (esto tiene en cuenta la transitividad de R en un modelo S4).

El único cambio que esto precisa en la prueba es que al demostrar que el Teorema 2 es válido para L tenemos que demostrar si $L\,\beta$ está en Γ_i entonces β no está únicamente en Γ_i y todos los subordinados de Γ_i, sino en todo subordinado$_*$ de Γ_i. Y esto se demuestra muy fácilmente. Sea Γ_j un subordinado de Γ_i y Γ_k un subordinado de Γ_j. Si $L\,\beta \in \Gamma_i$, entonces, puesto que $\vdash_{S4} (L\,\beta \supset LL\,\beta)$ $LL\,\beta \in \Gamma_i$. De aquí que $L\,\beta \in \Gamma_j$, y por ello $\beta \in \Gamma_k$ (de acuerdo con la construcción de Γ_j y Γ_k). Mediante inducción en la subordinación, el teorema, por tanto, resulta válido para cualquier subordinado$_*$ de Γ_i.

Para tratar con S5 también debemos requerir que R sea simétrica. Tenemos que decir, por tanto, que siempre que Γ_j sea un subordinado de Γ_i, entonces no se da simplemente $mu_i R mu_j$, sino también $mu_j R mu_i$. Esto significa que tenemos que añadir a la prueba S4 de que el Teorema 2 es válido para L una prueba de que si Γ_j es subordinado de Γ_i, entonces si $L\,\beta \in \Gamma_j$, $\beta \in \Gamma_i$. (Γ_i y Γ_j se presupone, desde luego, que son máximamente consistentes con respecto a S5).

Comprobamos esto demostrando que si β no está en Γ_i tampoco está $L\,\beta$ en Γ_j. Lo hacemos del modo siguiente: Si $\beta \notin \Gamma_i$, entonces (de acuerdo con Lema 2) $\sim\beta \in \Gamma_i$. Por tanto, puesto que $\vdash (\sim\beta \supset \sim L\beta)$ y $\vdash_{S5} (\sim L\,\beta \supset L \sim L\,\beta)$, $L \sim L\beta \in \Gamma_i$. Por consiguiente (de acuerdo con la construcción de Γ_j) $\sim L\,\beta \in \Gamma_j$; y así pues (de acuerdo con Lema 1) $L\,\beta \notin \Gamma_j$.

La completitud del CEP (no modal)[109]

Demostramos ahora mediante una prueba Henkin que la base que dimos para CEP en el capítulo 8 es completa para CEP. Siguiendo nuestro modelo anterior, lo que demostraremos es que para cualquier fbf que sea consistente con respecto a esta base podemos construir siempre un modelo verificador (verifying).

Comenzando por cualquier fórmula consistente, α, construimos, como en el caso de CP, un solo conjunto máximamente consistente, Γ. Γ, desde luego, ha de ser máximamente consistente con respecto a CEP (es decir con respecto a la base particular para CEP que hemos dado). También requerimos que Γ tenga lo que denominaremos *propiedad-E*. Un conjunto Λ, se dice que tiene la *propiedad-E.* SI para toda fbf de la forma $(\exists\,\mathbf{a})\,\beta$[110] de Λ existe también en Λ alguna fbf

---

108 *Un subordinado*$_*$ de Γ_i es un conjunto que o bien es el propio Γ_i o es un subordinado de Γ_i, o un subordinado de un subordinado de Γ_i, o... La notación que utilizamos aquí se deriva de la usada en Whitehead and Russell [1910] para una relación "ancestral". (Cuando sea conveniente utilizaremos "accesible$_*$" y "R$_*$" de forma análoga).

109 Esta sección contiene una versión modificada de la prueba original de Henkin [1949]

110 Es decir $\sim(\mathbf{a}) \sim\beta$, (sin abreviar)

para la cual usemos la notación β **[b/a]**, que difiera de β sólo en que siempre que β tenga libre **a**, β **[b/a]** tenga alguna variable individual, **b**, que esté libre en β **[b/a]** pero no esté libre en β.

Demostramos ahora cómo asegurarse de que Γ tiene la propiedad-E. Empezamos con algunas definiciones.

1. A cualquier fbf de la forma $(\exists \mathbf{a})\ \beta \supset \beta$ **[b/a]** –en la que β **[b/a]** se entiende del modo acabado de explicar– la denominaremos *fórmula-E con respecto a* **b**. En tal fórmula nos referiremos a **b** como a la *variable de sustitución* (replacement variable).

2. Todas las fórmulas-E que se diferencien únicamente en que cada una es una fórmula-E con respecto a una variable diferente, se dirá que tienen la misma *forma-E* (Una forma-E puede considerarse como el conjunto de todas las fórmulas-E con el mismo antecedente).

Evidentemente las formas-E son enumerables.

3. Un conjunto de fbfs se dirá que tiene la *propiedad-E'*, SI contiene al menos una fórmula-E de cada forma-E.

Es fácil demostrar que si un conjunto *máximamente consistente*, Λ, tiene la propiedad-E' tiene también la propiedad-E. Ya que, supongamos que $(\exists \mathbf{a})\beta$ está en Λ. Puesto que Λ tiene la propiedad-E', existe alguna variable **b** tal que $(\exists \mathbf{a})\beta \supset \beta$ **[b/a]** está también en Λ. Por consiguiente (de acuerdo con el Lema 3) β **[b/a]** está en Λ.

Para una fbf consistente dada, α, contruimos Γ como sigue: Comenzamos por $\{\alpha\}$. Luego suponemos que todas las formas-E están dispuestas según un orden establecido (standard) y para cada una de ellas añadimos, en aquel orden, una fórmula-E con respecto a alguna variable que no aparece en ninguna otra parte en aquella fórmula-E, ni en ninguna fórmula-E precedente, ni en α[111]. (Puesto que tenemos un surtido ilimitado de variables individuales a nuestra disposición, y puesto que en cada paso (stage) sólo están ya en el conjunto un número finito de fórmulas, habrá siempre una nueva variable disponible para este propósito). Finalmente aumentamos el conjunto haciéndolo máximamente consistente según el modo acostumbrado (standard)[112]. Evidentemente Γ así construido tiene la propiedad-E' y, por consiguiente la propiedad-E.

Necesitamos probar ahora que el conjunto obtenido cuando todas las fórmulas-E han sido añadidas es consistente, ya que, de otro modo, no podría ni siquiera comenzarse el paso (stage) final de la construcción. Puesto que $\{\alpha\}$ es, por hipótesis, consistente, es suficiente demostrar el siguiente lema:

LEMA 5

Si Λ es un conjunto consistente de fbfs, entonces $\Lambda \cup \{(\exists \mathbf{a})\ \beta \supset \beta$ **[b/a]**$\}$ es consistente siempre que **b** no aparezca en ninguna fbf de Λ o en $(\exists \mathbf{a})\ \beta$.

PRUEBA

Sea Λ' un subconjunto finito cualquiera de Λ; entonces tenemos que demostrar

---

111 De forma equivalente presuponemos que las fbfs de la forma $(\exists \mathbf{a})\ \beta$ están dispuestas en el orden habitual y luego añadimos a cada una, una fórmula-E como antecedente, etc.

112 Expresada más formalmente la construcción de Γ es como sigue. Γ_{00} es $\{\alpha\}$ Cada Γ_{0i} $(i > 0)$ es $\Gamma_{0(i-1)} \cup \{(\exists \mathbf{a})\ \beta \supset \beta$ **[b/a]** $\}$ donde $(\exists \mathbf{a})\ \beta$ es la fbf i-ésima de esa forma (en el orden habitual) y **b** no aparece en $(\exists \mathbf{a})\ \beta$ ni en ningún miembro de $\Gamma_{0(i-1)}$. Γ_0 es la unión de todos los Γ_{0j} $(j \geqslant 0)$. Γ se forma a partir de Γ_0 y las fbfs de CEP en el orden habitual según la forma explicada anteriormente para el caso general. Evidentemente Γ_0 será consistente si cada Γ_{0i} lo es.

que $\Lambda' \cup \{(\exists \mathbf{a})\ \beta \supset \beta\,[\mathbf{b}/\mathbf{a}]\}$ es consistente. Supongamos que no lo es; es decir (designando con 'γ' la conjunción (conjuction) de las fbfs de Λ'),

$$\vdash \sim(\gamma \cdot ((\exists \mathbf{a})\ \beta \supset \beta\,[\mathbf{b}/\mathbf{a}])$$

Entonces, de acuerdo con $\vdash (\sim(p \cdot q) \supset (p \supset \sim q))$,

$$\vdash (\gamma \supset \sim((\exists \mathbf{a})\ \beta \supset \beta\,[\mathbf{b}/\mathbf{a}])$$

Puesto que **b** no está libre en γ, tenemos entonces, de acuerdo con $\forall 2$,

$$\vdash (\gamma \supset (\mathbf{b}) \sim((\exists \mathbf{a})\ \beta \supset \beta\,[\mathbf{b}/\mathbf{a}])$$

y por tanto de acuerdo con Transp y Def $\exists$,

$$\vdash ((\exists \mathbf{b})\ ((\exists \mathbf{a})\ \beta \supset \beta\,[\mathbf{b}/\mathbf{a}]) \supset \sim\gamma)$$

Pero de acuerdo con CEP4, puesto que **b** no está libre en β,

$$\vdash (\exists \mathbf{b})\ ((\exists \mathbf{a})\ \beta \supset \beta\,[\mathbf{b}/\mathbf{a}])$$

Por ello de acuerdo con MP:

$$\vdash \sim\gamma$$

es decir Λ' es inconsistente, contrariamente a la hipótesis original de la consistencia de Λ.

Se sigue de ello que el conjunto obtenido una vez que hemos añadido todas las fórmulas-E especificadas en la construcción de Γ es consistente, y por tanto el propio Γ es consistente (y por supuesto máximo (maximal)) por las razones dadas anteriormente para el caso general.

Ahora construimos el modelo-CEP $<$D, V$>$. D tendrá que ser algún dominio infinito de individuos; para mayor simplicidad sea el conjunto de las propias variables individuales, consideradas como objetos (letras, entidades tipográficas). Hagamos que V asigne a cada variable individual (considerada como variable) ella misma (considerada como objeto). De este modo V (x) —el valor de la *variable* x— ha de ser la *entidad tipográfica* 'x' y así sucesivamente[113]. Cuando ϕ sea una variable predicativa n-ádica, sea V (ϕ) el conjunto de precisamente aquellos n-múltiplos ordenados $\{<x_1, ..., x_n>, <y_1, ..., y_n> ...\}$ tal que $\phi(x_1, ..., x_n), \phi(y_1, ..., y_n)$ ... estén en Γ. Entonces para cualquier ϕ n-ádica y para cualesquiera variables individuales $z_1, ..., z_n$ tendremos V $(\phi(z_1, ..., z_n)) = 1$ ó 0 según que $\phi(z_1, ..., z_n) \in \Gamma$ o no. Es decir, si β es una fórmula atómica, V $(\beta) = 1$ ó 0 según que $\beta \in \Gamma$ o no. Todas las demás fbfs pueden ser valoradas según las reglas acostumbradas (standard) para una asignación CEP ([V $\sim$], [V $\vee$], [V $\forall$]).

Podemos ahora establecer el teorema crucial de CEP:

TEOREMA 3

Dados D *y* V *tal como se definieron anteriormente, para toda fbf,* β, *de CEP,* V $(\beta) = 1$ *ó* 0, *según que* $\beta \in \Gamma$ *o no.*

El resultado de completitud se sigue de este teorema como en los casos previos.

La prueba del teorema es, como antes, mediante inducción en la construcción de una fbf (de CEP).

Para fórmulas atómicas el teorema es válido de acuerdo con la asignación inicial a las variables. Para $\sim$ y $\vee$ la prueba es como para CP (pág. 135). Queda

[113] Evidentemente cualquier correspondencia 1-1 entre variables y un conjunto de objetos servirá, pero ésta es la más fácil de especificar.

por demostrar, por consiguiente, que el teorema es válido para la cuantificación.

Ahora bien si β es una fbf atómica, el teorema es válido no simplemente para β sino para todas las muestras de sustitución (para variables individuales)[114] de β, ya que para cada muestra de sustitución tal es ella misma una fbf atómica. Más aún, la prueba para $\sim$ podría fácilmente volverse a considerar para demostrar que si el teorema es válido para toda muestra de sustitución de β entonces es válido para toda muestra de sustitución de $\sim\beta$; y la posición es semejante para $\vee$. Por tanto para la cuantificación podemos tomar como hipótesis de inducción que el teorema es válido para β y para toda muestra de sustitución (para variables individuales) de ella y a partir de esto tenemos que demostrar que es válido para $(\mathbf{a})\beta$ y para toda muestra de sustitución de ella.

(A) Supongamos que $(\mathbf{a})\beta \in \Gamma$. Tenemos que demostrar que en ese caso $V((\mathbf{a})\beta = 1$, es decir que para todo V′ que se diferencie de V solamente en la asignación que hace a **a**, $V'(\beta) = 1$. Consideremos cualquier V′ tal. El valor que asigna a **a** seguirá siendo, desde luego, algún miembro de D, es decir, alguna variable individual. Sea ésta **b**.

Ahora supongamos (i) que **b** es una variable para la cual **a** está libre en β[115]. Entonces, puesto que V′ hace las mismas asignaciones que V, excepto en que mientras que $V(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, $V'(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, el valor que V′ asigna a β será el mismo que el que V asigna a la fórmula que expresamos anteriormente como $\beta[\mathbf{b}/\mathbf{a}]$; es decir, $V'(\beta) = V(\beta[\mathbf{b}/\mathbf{a}])$. Pero de acuerdo con $\forall 1$,

$$\vdash (\mathbf{a}).\beta \supset \beta[\mathbf{b}/\mathbf{a}]$$

Por tanto (de acuerdo con el Lema 3) puesto que $(\mathbf{a})\ \beta \in \Gamma$, $\beta[\mathbf{b}/\mathbf{a}] \in \Gamma$; y así (de acuerdo con la hipótesis de inducción), puesto que $\beta[\mathbf{b}/\mathbf{a}]$ es una muestra de sustitución de β, $V(\beta[\mathbf{b}/\mathbf{a}]) = 1$. Por tanto $V'(\beta) = 1$.

Supongamos, sin embargo, (ii) que **b** es una variable para la cual **a** no está libre en β —es decir, que en β **a** sí aparece dentro del ámbito (scope) de **(b)** o $(\exists\, \mathbf{b})$. En este caso formamos una variante alfabética ligada de β, en el sentido explicado en la pág. 123 en la que no aparecen ni **(b)** ni $(\exists\, \mathbf{b})$. Denominemos a la fórmula resultante, γ. Ahora sustituimos la **a** que aparezca libre en cualquier parte de γ por **b**; y puesto que no aparece ningún cuantificador que contenga **b** en γ, el resultado es $\gamma[\mathbf{b}/\mathbf{a}]$. Puesto, sin embargo, que β y γ son variantes alfabéticas ligadas, $\vdash (\mathbf{a})\beta \equiv (\mathbf{a})\gamma$ (de acuerdo con CEP9); por tanto, puesto que $(\mathbf{a})\ \beta \in \Gamma$, $(\mathbf{a})\ \gamma \in \Gamma$. Pero de acuerdo con $\forall 1$, $\vdash (\mathbf{a})\ \gamma \supset \gamma\ [\mathbf{b}/\mathbf{a}]$; por tanto $\gamma[\mathbf{b}/\mathbf{a}] \in \Gamma$. Ahora bien $\gamma[\mathbf{b}/\mathbf{a}]$ es una muestra de sustitución de γ; y así pues (de acuerdo con la hipótesis de inducción), $V(\gamma[\mathbf{b}/\mathbf{a}]) = 1$. Por consiguiente de acuerdo con la misma prueba que en (i), $V'(\gamma) = V(\gamma[\mathbf{b}/\mathbf{a}]) = 1$. Pero, puesto que γ es una variante alfabética ligada de β, cualquier asignación de valor CEP dará el mismo valor a cada una de ellas; por tanto tenemos $V'(\beta) = V'(\gamma)$, y por ello en este caso también $V'(\beta) = 1$[116].

---

114 γ es una muestra de sustitución (para variables individuales) de β SI se obtiene a partir de β mediante la sustitución uniforme de cualquier variable individual libre de β por cualquier otra variable individual, siempre que esa variable individual no resulte ligada en γ. Por extensión también consideramos a las muestras de sustitución de variantes alfabéticas ligadas de β (*vide* pág. 123) como muestras de sustitución de β.

115 Es decir que en β **a** no aparece dentro del ámbito (scope) de ningún cuantificador que contenga a **b**.

116 Un ejemplo quizá aclare esto más. Sea **a** x y sea β $(\exists\, y)\,\phi xy$. Entonces **(a)** β es $(x)\,(\exists\, y)\,\phi xy$. Suponemos que $(x)\,(\exists\, y)\,\phi xy \in \Gamma$ y deseamos demostrar que en ese caso V $((x)$

(B) Supongamos (a) $\beta \notin \Gamma$. Tenemos que demostrar que V ((a) β) = 0, es decir, que para alguna V′ que se diferencia de V solamente en la asignación a **a**, V′ (β) = 0. Puesto que (a) $\beta \notin \Gamma$, $\sim$(a) $\beta \in \Gamma$ (de acuerdo con el Lema 2); de aquí que de acuerdo con CEP3 y el Lema 3, ($\exists$ **a**) $\sim\beta \in \Gamma$. Por consiguiente, puesto que Γ tiene la propiedad-E, existe también en Γ alguna fbf $\sim\beta$ [**b**/**a**]; y por tanto (de acuerdo con el Lema 1) β [**b**/**a**] $\notin \Gamma$. Ahora bien, β [**b**/**a**] es una muestra de sustitución de β, y así pues (de acuerdo con la hipótesis de inducción) V (β [**b**/**a**]) = 0. Hagamos que V′ difiera de V solamente en que V′ (**a**) = **b**. Entonces para este V′, V′ (β) = V (β [**b**/**a**]), y por tanto V′ (β) = 0.

Para cada muestra de sustitución de (a) β puede evidentemente construirse una prueba análoga a partir de la misma hipótesis de inducción; por tanto el Teorema 3 es válido para la cuantificación; y esto completa la prueba de que es válido para todas las fbfs del CEP.

La completitud del CEP modal

Podemos ahora tratar de los cálculos de predicados modales. Primero daremos una prueba Hankin de la completitud de T + FB, y luego indicaremos las modificaciones requeridas para S4 + FB y CEP + S5. En términos generales nuestros métodos consistirán en combinar las pruebas dadas para los sistemas proposicionales modales y para el CEP en las dos secciones anteriores[117]

Igual que anteriormente, demostramos la completitud mostrando que para cualquier fórmula consistente del sistema que estemos tratando podemos construir un modelo verificador (verifying). Dada una fórmula, α, que sea consistente respecto a T + FB, demostramos cómo construir, partiendo de α, un sistema de conjuntos máximamente consistentes, Γ, en el que los conjuntos se relacionen entre sí como lo hacen en el caso de T, y en el cual cada conjunto tiene la propiedad-E. Para ser más explícitos, Γ ha de tener las siguientes características:

($\exists y$) ϕxy = 1; es decir que para toda V′ que difiera de V sólo en la asignación a x, V′ ($\exists y$) ϕxy) = 1. La hipótesis de inducción es que toda muestra de sustitución de ($\exists y$) ϕxy tiene el valor 1 SI está en Γ. Ahora bien la x de ($\exists y$) ϕxy está libre para toda variable excepto y; y V′ debe ser tal que V′ (x) = y o, de lo contrario tal V′ (x) es alguna otra variable, por ejemplo z. Si es esto último tenemos el caso (i); β [**b**/**a**] será entonces ($\exists y$) ϕzy (**b** es en ambos casos justamente V′ (x)); y debe quedar claro que en ese caso el valor que V′ da a ($\exists y$)ϕxy será el mismo que V (que se asigna todas las variables a sí misma) dé a esta fórmula ($\exists y$) ϕzy. Es decir V′(($\exists y$)ϕxy = V (($\exists y$) ϕzy. Pero $\forall$1 asegura que ($\exists y$) ϕzy está en Γ, y además ($\exists y$) ϕzy es una muestra de sustitución de ($\exists y$) ϕxy, por tanto la hipótesis de inducción se aplica a ella (es decir V (($\exists y$),ϕzy) = 1). Por consiguiente para esta V′ y para cualquiera excepto una que haga V′ (x) = y, V′ ($\exists y$)ϕxy = 1.

Considerando ahora el caso más complicado de que V′ (x) = y, elegimos alguna variable que no sea y, por ejemplo w, y formamos una variante alfabética ligada de ($\exists y$) ϕxy, a saber ($\exists w$) ϕxw (ésta es la γ del caso (ii)). En *ésta* sustituimos x por y sin ligar a y, y por tanto obtenemos una muestra de sustitución de ($\exists y$) ϕxy, a saber ($\exists w$) ϕyw. CEP9 y $\forall$1 nos aseguran que si (x) ($\exists y$) ϕxy está en Γ, también lo está ($\exists w$) ϕyw, y puesto que ($\exists y$)ϕxy y ($\exists w$) ϕxw deben tener el mismo valor, la prueba tiene lugar entonces como en (i). Así pues, para toda V′ que tengamos que considerar V′(($\exists y$) ϕxy) = 1, que es lo que teníamos que demostrar.

117 Existen otras pruebas de completitud para algunos cálculos de predicados modales. Así Kripke [1959] basa una prueba para CEP + S5 en cuadros semánticos. Bayart [1959] también ha demostrado la completitud de CEP + S5 mediante un método semejante al nuestro, aunque un poco más sencillo ya que S5 no requiere una relación R. Bayart (op. cit.) también demuestra la completitud de S5 cuantificacional de segundo orden (en el sentido de la completitud definida para cálculos de orden superior en Henkin [1950]).

1. $\alpha \in \Gamma_1$.
2. Para cada Γ_i de Γ y para toda fbf de la forma $M\beta$ de Γ existe un conjunto subordinado Γ_j tal que (i) $\beta \in \Gamma_j$ y (ii) para toda fbf de la forma $L\gamma$ de Γ_i, $\gamma \in \Gamma_j$.
3. Para todo Γ_i de Γ y para toda fbf de la forma $(\exists \mathbf{a})\beta$ en Γ_i existe en Γ_i una fbf $\beta[\mathbf{b/a}]$, que se diferencia de β sólo en que **b** libre sustituye siempre a **a** libre.

La construcción, sin embargo, no será tan directa como en los casos anteriores por la siguiente razón: Supongamos que hemos de construir un conjunto máximamente consistente Γ_j, para una fbf $M\beta$ de Γ_i. El plan natural parecería ser éste:

(i) Comenzar por $\{\beta\}$.
(ii) Añadir toda fbf γ tal que $L\gamma \in \Gamma_i$.
(iii) Darle al conjunto la propiedad-E′ del modo descrito para CEP.

(iv) Por último aumentar el conjunto haciéndolo máximamente consistente. Mas aquí tropezamos con una dificultad. Mientras que es fácil demostrar (del mismo modo que hicimos para T y CEP respectivamente) que, habiendo comenzado por $\{\beta\}$ podemos hacer consistentemente *o bien* (ii) *o bien* (iii), no tenemos garantías de que podamos hacer ambas cosas. Ya que, al probar, para CEP, que podíamos dar al conjunto la propiedad-E′, era esencial que la variable de sustitución **b** en cada sucesiva fórmula-E fuese una que no hubiese aparecido hasta el momento; y que la disponibilidad de estas nuevas variables dependía del hecho de que cada fórmula-E se añadía a un conjunto *finito* de fbfs, en el que, por consiguiente, solamente habían podido aparecer un número finito de variables. Pero en el presente caso tendríamos que añadir estas fórmulas-E a un conjunto infinito, a saber, las γs mencionadas en (ii) y, por consiguiente, no podríamos estar seguros de disponer de nuevas variables. Una dificultad semejante se originaría si invertimos el orden y hacemos (iii) antes de (ii); no podríamos estar seguros de que las γs fuesen consistentes con todas las fórmulas-E.

Esta dificultad puede solucionarse del siguiente modo[118]: Comenzamos ampliando las nociones definidas en la pág. 139.

1. *Una fórmula-E_M con respecto a* **b** se define como sigue:

(i) Cualquier fbf de la forma $(\exists \mathbf{a})\beta \supset \beta[\mathbf{b/a}]$ es una fórmula-E_M con respecto a **b**.

(ii) Si γ es una fórmula-E_M con respecto a **b** y δ es una fbf que no contenga a **b** libre, entonces $M\delta \supset M(\delta \cdot \gamma)$ es una fórmula-E_M con respecto a **b**.

En virtud de (i), toda fórmula-E con respecto a **b** es también una fórmula-E_M con respecto a **b**.

2. Todas las fórmulas-E_M que difieran únicamente en que cada una de ellas es una fórmula-E_M con respecto a una variable distinta se considerará que tienen la misma forma-E_M. (Evidentemente las formas-E_M son enumerables).

---

118 La solución que sigue es la más sencilla que hemos podido descubrir; no garantizamos que no sea posible otra más sencilla. No es desde luego el simple hecho de que el conjunto obtenido de acuerdo con (i) y (ii) sea infinito lo que causa la dificultad. Es más bien el hecho de que el conjunto depende de un conjunto máximamente consistente ya establecido (Γ_i) de fbfs de CEP y el que no tengamos modo de asegurar que todas las variables individuales de CEP no aparezcan en el conjunto obtenido cuando se introducen las γs.

3. Un conjunto de fbfs se considerará que tiene la *propiedad*-E_M' SI contiene por lo menos una fórmula-E_M de cada forma-E_M.

Evidentemente un conjunto que tenga la propiedad-E_M' tendrá la propiedad-E'; y por tanto, puesto que hemos demostrado en la pág. 139 que un conjunto máximamente consistente con la propiedad-E' tiene la propiedad-E, si un conjunto máximamente consistente, tiene la propiedad-E_M' tiene también la propiedad-E[119]

A continuación demostramos dos Lemas, el primero de los cuales es preliminar al segundo.

LEMA 6

Si γ es una fórmula-E_M con respecto a **b**, entonces $\vdash (\exists \mathbf{b})\, \gamma$.

La prueba se realiza mediante inducción en la construcción de una fórmula-E_M:

1. Si γ es de la forma $(\exists \mathbf{a})\, \beta \supset \beta\,[\mathbf{b}/\mathbf{a}]$, entonces de acuerdo con CEP4 $\vdash (\exists \mathbf{b})\, ((\exists \mathbf{a})\, \beta \supset \beta\,[\mathbf{b}/\mathbf{a}])$ es decir $\vdash (\exists \mathbf{b})\, \gamma$.

2. Supongamos (de acuerdo con la hipótesis de inducción) que γ es una fórmula-E_M con respecto a **b** y que $\vdash (\exists \mathbf{b})\, \gamma$. Tenemos que demostrar que en ese caso si **b** no está libre en δ, entonces $\vdash (\exists \mathbf{b})\, (M\, \delta \supset M(\delta \cdot \gamma))$. Puesto que $\vdash (\exists \mathbf{b})\, \gamma$, tenemos, de acuerdo con RD4 (pág. 45), $\vdash M\, \delta \supset M\, (\delta \cdot (\exists \mathbf{b})\, \gamma)$; por tanto de acuerdo con CEP5 (puesto que **b** no está libre en δ), $\vdash M\, \delta \supset M\, (\exists \mathbf{b})\, (\delta \cdot \gamma)$; por tanto de acuerdo con la fórmula Barcan, $\vdash M\, \delta \supset (\exists \mathbf{b})\, M\, (\delta \cdot \gamma)$; y por tanto, finalmente, de acuerdo con CEP6 (puesto que **b** no está libre en $M\, \delta$), $\vdash (\exists \mathbf{b})\, (M\, \delta \supset M\, (\delta \cdot \gamma))$. **Q.E.D.**

Por consiguiente el Lema 6 es válido para todas las fórmulas-E_M.

LEMA 7

Si Λ es un conjunto consistente de fórmulas, ninguna de las cuales contiene ninguna aparición de **b**, y γ es una fórmula-E_M con respecto a **b**, entonces $\Lambda \cup \{\gamma\}$ es consistente (es decir, γ puede añadirse consistentemente a Λ).

La prueba es como la del Lema 5 (pág. 139) con evidentes modificaciones y utilizando el Lema 6 para obtener $\vdash (\exists \mathbf{b})\, \gamma$.

Mostramos ahora cómo, comenzando por cualquier fbf consistente, α, podemos construir un sistema Γ, de conjuntos máximamente consistentes (con respecto a T + FB).

Presuponemos que las fbfs de T + FB han sido dispuestas en algún orden establecido. Lo mismo presuponemos respecto a las formas-E_M.

Para Γ_1 comenzamos por $\{\alpha\}$. Entonces añadimos sucesivamente, para cada forma-E_M alguna fórmula-E_M con respecto a una variable que no aparezca anteriormente en la construcción del conjunto. De acuerdo con el Lema 7 el conjunto continúa siendo consistente. Aumentamos entonces el conjunto haciéndolo máximamente consistente según la forma ordinaria. El resultado es Γ_1, y evidentemente éste tiene la propiedad-E_M', y por tanto la propiedad-E.

Ahora demostramos que dado cualquier conjunto máximamente consistente Γ_i con la propiedad-E_M', podemos construir, para cualquier fbf $M\, \beta$ de Γ_i, un conjunto

---

[119] El quid de nuestra solución al problema que nos hace frente es éste: si damos a Γ_i la propiedad $E_{M'}$ que en cierto modo se describirá a continuación, podemos luego añadir todas las γ's (para $L\gamma \in \Gamma_i$) sin temor a la inconsistencia. La propiedad $E_{M'}$ se define de tal modo que (i) proporciona, en un conjunto máximamente consistente, la propiedad E y (ii) al construir un subordinado de cualquier conjunto que tenga la propiedad $E_{M'}$ siempre podemos dar al subordinado la propiedad $E_{M'}$ también.

máximamente consistente Γ_j que contenga β y toda fbf γ tal que $L\ \gamma \in \Gamma_i$ y teniendo él mismo la propiedad-E$_M$'.

Comenzamos Γ_j por $\{\beta\}$. A continuación damos al conjunto la propiedad-E$_M$', del siguiente modo. Tomamos la primera forma-E$_M$ del orden establecido. Sean δ_{11}, ..., δ_{1n}, ... las fórmulas que tienen esta forma-E$_M$; es decir, todas ellas, δ_{11}, ..., δ_{1n}, ... tienen la primera forma-E$_M$ y difieren únicamente en que cada una de ellas es una fórmula-E$_M$ con respecto a una variable distinta. La cuestión es: ¿cuál de éstas tendremos que poner en Γ_j? Establecemos esto tomando como referencia Γ_i. Γ_i tiene la propiedad-E$_M$ y por tanto, de acuerdo con la definición de una fórmula-E$_M$, existirá en Γ_i, no simplemente alguna de las fórmulas $\delta_{11}, ..., \delta_{1n}$, ..., sino también alguna fórmula

$$(1)\ M\beta \supset (\beta \cdot \delta_{1*})$$

En la que δ_{1*} es una de las δ_{11}, ... δ_{1n}, ... y β es la fórmula por la que hemos empezado Γ_j. Y es esta δ_{1*} la que hemos seleccionado para poner en Γ_j. (Obsérvese puesto que (1) y $M\beta$ están en Γ_i, también lo está $M(\beta \cdot \delta_{1*})$.)

A continuación tomamos la segunda forma-E$_M$, y de las fórmulas-E$_M$ con esta forma-E$_M$, δ_{21}, ..., δ_{2n}, ... seleccionamos para Γ_j alguna fórmula δ_{2*} tal que

$$M(\beta \cdot \delta_{1*}) \supset M(\beta \cdot \delta_{1*} \cdot \delta_{2*})$$

esté en Γ_i. Puesto que Γ_i tiene la propiedad-E$_M$', debe existir una fórmula tal en Γ_i. (Obsérvese también que puesto que, como acabamos de demostrar, $M(\beta \cdot \delta_{1*})$ está en Γ_i también lo está $M(\beta \cdot \delta_{1*} \cdot \delta_{2*})$.)

En general, dado que para las primeras formas-E$_M$ m hemos añadido las fórmulas-E$_M$: δ_{1*}, ..., δ_{m*}, entonces añadimos una fórmula $\delta_{(m+1)*}$, de la forma-E$_M$ $(m+1)^a$, que es tal que

$$M(\beta \cdot \delta_{1*} \ldots\ldots \delta_{m*}) \supset M(\beta \cdot \delta_{1*} \ldots\ldots \delta_{m*} \cdot \delta_{(m+1)*})$$

está en Γ_i. Puesto que Γ_i tiene la propiedad-E$_M$' existirá siempre tal fórmula $\delta_{(m+1)*}$. (También, en general, $M(\beta \cdot \delta_{1*} \ldots\ldots \delta_{m*} \cdot \delta_{(m+1)*})$ estará en Γ_i. Y de acuerdo con $\vdash M(p \cdot q) \supset Mp$, cuando $\{\delta_1, ..., \delta_n\}$ sea cualquier conjunto finito de las fórmulas que hemos puesto en Γ_j mediante el proceso que hemos descrito, $M(\beta \cdot \delta_1 \ldots\ldots \delta_n) \in \Gamma_i$).

Sea Γ_j' el conjunto obtenido añadiendo a $\{\beta\}$ una fórmula-E$_M$ para cada forma-E$_M$, seleccionada del modo acabado de explicar. Evidentemente Γ_j' tiene la propiedad-E$_M$'.

El paso siguiente en la construcción de Γ_j es añadir a Γ_j todas las fbfs, γ, tales que $L\ \gamma \in \Gamma_i$. Denominemos al conjunto resultante, Γ_j''. Demostramos ahora que Γ_j es consistente.

Consideremos cualquier subconjunto finito de Γ_j'',

$$(2)\ \{\beta, \delta_1, ..., \delta_n, \gamma_1, ..., \gamma_m\}^{120}$$

siendo β la fórmula inicial de Γ_j, $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, siendo cada una de las δs una fórmula-E$_M$ puesta en Γ_j' en el proceso de darle la propiedad-E$_M$' y siendo cada γ tal que $L\ \gamma \in \Gamma_i$. Como hemos observado anteriormente, $M(\beta \cdot \delta_1 \ldots\ldots \delta_n)$, estará en Γ_i; y por tanto

$$(3)\ \{M(\beta \cdot \delta_1, ..., \delta_n)\ L\ \gamma_1, ..., L\ \gamma_m\}$$

es un subconjunto de Γ_i. Pero Γ_i es por hipótesis consistente; por tanto (3) es consistente, y por consiguiente (de acuerdo con el Lema 4) (2) es consistente.

120 Desde luego β no estará en todo subconjunto de Γ_j''; pero evidentemente si (2) es consistente, entonces (2) con β omitida es también consistente.

Γ_j'' no tiene por consiguiente ningún subconjunto finito inconsistente; es decir Γ_j'' es consistente.

Una vez construido Γ_j'', finalmente completamos la construcción de Γ aumentando Γ_j'' para hacerlo máximamente consistente, según el modo acostumbrado.

La construcción de Γ puede ahora realizarse como la de T proposicional. Formamos Γ_1 según el modo descripto, comenzando por la fórmula consistente dada α. Para todo $\Gamma_i \in \Gamma$ y para toda fórmula $M\beta$ de Γ_i ha de existir en Γ un conjunto subordinado máximamente consistente Γ_j construido del modo que acabamos de explicar. Es evidente que Γ tiene las propiedades señaladas en la pág. 143.

El resto de la prueba de completitud es ya directa. Definimos el siguiente modelo T + FB $<$MU, R, D, V$>$ que combinará las características de los modelos que utilizamos anteriormente para T y para CEP. Con cada Γ_i de Γ asociamos un mundo, mu_i. Sea MU el conjunto de todos los mundos tales. Sea R la relación tal que mu_iRmu_j SI Γ_j es o bien un subordinado de Γ_i o es el propio Γ_i. Sea D, igual que anteriormente, el conjunto de las variables individuales consideradas como objetos. También igual que antes tenemos V (**a**) = **a**, para cada variable individual **a**. Para la asignación de valor a un predicado *n*-ádico tenemos lo siguiente:

Para cualquier ϕ *n*-ádico, V (ϕ) es el conjunto de precisamente aquellos $(n+1)$-múltiplos ordenados $\{<x_1, ..., x_n, mu_i>, ...\}$ tal que $\phi(x_1, ..., x_n) \in \Gamma_i$ (para cada $\Gamma_i \in \Gamma$).

El valor asignado por V a cualquier fbf puede ahora determinarse mediante las reglas dadas en la pág. 129.

Podemos establecer ahora el teorema al que todo esto ha ido conduciendo:

TEOREMA 4

Dados MU, R, D *y* V, *tal como se definieron anteriormente, para cualquier fbf,* β, *de* T + FB *y para cualquier* $mu_i \in$MU, V $(\beta, mu_i) = 1$ *ó* 0, *según que* $\beta \in \Gamma_i$ *o no.*

La prueba también aquí se realiza por inducción en la construcción de una fbf. El teorema es válido para fórmulas atómicas en virtud de la asignación de valor inicial, como hemos indicado anteriormente. Para $\sim$, $\vee$, L y la cuantificación las pruebas son las mismas que las de PM, T o CEP, según el caso, (con evidentes modificaciones) y no las mencionaremos aquí.

La completitud de T + FB se sigue del teorema del mismo modo que en los casos anteriores.

Para la completitud de S4 + FB y CEP + S5 realizamos las mismas modificaciones que en los correspondientes sistemas proposicionales (vide pág.138). Es decir, para S4 + FB hacemos que mu_iRmu_j cuando Γ_j es un subordinado$_*$ de Γ_i; y para CEP + S5 tenemos además que siempre que Γ_j sea un subordinado de Γ_i mu_jRmu_i además de mu_iRmu_j. Las adiciones que hace falta realizar para la prueba de completitud de T + FB son las mismas que las de los sistemas proposicionales.

CAPITULO X

MODALIDAD Y EXISTENCIA

La validez sin la fórmula Barcan

La definición de validez que dimos para los cálculos de predicados modales en el capítulo 8 era tal que hacía que la fórmula Barcan fuera válida, y en el capítulo 9 demostramos la completitud de sistemas que contenían la fórmula Barcan con respecto a esa definición. Señalábamos, sin embargo, que en el caso de T y S4 (aunque no de S5) cuantificacional la fórmula Barcan es independiente del resto de la base, y que podíamos por tanto tener dos versiones de estos sistemas, uno con la fórmula Barcan y otro sin ella. La cuestión que se plantea, por consiguiente, es: ¿podemos dar una explicación de la validez que se adecue a las versiones de estos sistemas que no contienen la fórmula Barcan (a saber CEP + T y CEP + S4)?

No es ésta una cuestión que presente un interés meramente formal, ya que se han hecho considerables objeciones a la validez de la fórmula desde un punto de vista intuitivo[121]. Es conveniente considerar aquí la fórmula Barcan como la fbf

$$(x)\, L\, \phi x \supset L\, (x)\, \phi x$$

De acuerdo con la interpretación habitual (standard) lo que esto significa es que si todo necesariamente posee una cierta propiedad ϕ, entonces necesariamente se da el hecho de que todo posee esa propiedad. Ahora bien, se arguye a veces, aun en el caso de que todo lo que existe actualmente sea necesariamente ϕ, esto no excluye la posibilidad de que puedan existir (o puedan haber existido) algunas cosas que no sean en absoluto ϕ —y en ese caso no sería una verdad necesaria el que todo sea ϕ.

Esta objeción a la fórmula Barcan depende del presupuesto de que en varios "posibles mundos", puedan no sólo tener los objetos distintas propiedades de las que tienen en el mundo actual, sino que puedan existir incluso objetos que no existen en absoluto en el mundo actual. Ahora bien, es al menos plausible considerar la semántica que hemos dado para los cálculos de predicados modales implícitamente denegadora de este presupuesto, ya que en cada modelo hemos tenido un solo dominio de individuos, el mismo para cada mundo. La validez de la fórmula Barcan está en realidad relacionada con este aspecto de nuestra Semántica. Y esto sugiere que podríamos conseguir una semántica que no hiciese la fórmula válida, mediante la admisión de modelos en los cuales dominios diferentes estén asociados con diferentes mundos. Mostramos ahora cómo puede hacerse esto:

Definimos un modelo CEP + T como un quíntuple ordenado $<$MU, R, D, Q, V$>$, en el que MU, R y D se han de entender como antes, V es la asignación de valor de un tipo que en seguida especificaremos, y Q es una función cuyo argumento es

121 Una de las primeras de estas objeciones se encuentra en Prior [1957], págs. 26-28 *et al.* También hay una discusión en Hintikka [1961]. Para una objeción de un tipo un tanto diferente *vide* Myhill [1958], pág. 80. Para una defensa de la fórmula *vide* Barcan Marcus [1962] págs. 88-90.

un miembro de MU y cuyo valor es un subconjunto de D. Lo que esto significa es que Q asigna a cada mundo mu_i, como dominio suyo particular, un cierto conjunto seleccionado del dominio total D. Escribimos "Q (mu_i)" para "el dominio asignado por Q a mu_i" y normalmente lo abreviamos con "D_i". También establecemos el requisito (*requisito de inclusión*) de que siempre que $mu_i R mu_j$, $D_i \supseteq D_j$; es decir que siempre que mu_j sea accesible a mu_i todos los miembros del dominio de mu_i son también miembros del dominio de mu_j.

En un modelo CEP + T, V se diferencia de las demás clases de asignaciones de valor con que nos hemos encontrado en que a veces asigna un valor a una fbf (en un mundo dado) pero a veces no le asigna ningún valor en absoluto. Cuando V asigne un valor (1 ó 0) a α en mu_i, diremos que *V define* a α (en mu_i) o que V (α, mu_i) es *definida*; cuando V no asigne ningún valor a α en mu_i, diremos que V deja a α *sin definir* (en mu_i) o que V (α, mu_i) está *sin definir*.

Igual que antes, V asigna a cada variable individual, sin excepción, algún miembro de D. Para una fórmula atómica, α, sin embargo, si el valor asignado a cualquiera de las variables individuales de α no está en D_i, entonces V (α, mu_i) está sin definir; pero si todos estos valores están en D_i, entonces V (α, mu_i) = 1 ó 0, según las mismas reglas que anteriormente. Las fórmulas no atómicas se evaluan o se dejan sin definir, según se explicará más adelante[122].

Las condiciones que ha de satisfacer V son:

1. Para toda variable individual, **a**, existe algún $u \in D$ tal que V (**a**) = u.

2. Para toda variable de predicado n-ádico, ϕ, V (ϕ) es algún conjunto de múltiplos (n + 1) ordenados, de miembros de D, como se describió en la pág. 129.

3. Si α es una fórmula atómica $\phi(x_1, \ldots x_n)$ entonces para cualquier $mu_i \in MU$, si cada V (x_1), ... V (x_n) está en D_i, V (α, mu_i) = 1 ó 0 según que $<$V (x_1), ..., V (x_n), $mu_i> \in$ V (ϕ) o no; en caso contrario V (α, mu_i) está sin definir.

4. Para cualquier fbf, α, y para cualquier $mu_i \in MU$, V ($\sim\alpha$, mu_i) = 1 SI V (α, mu_i) = 0, y V ($\sim\alpha$, mu_i) = 0 SI V (α, mu_i) = 1. (De este modo si V (α, mu_i) está sin definir también lo está V ($\sim\alpha$, mu_i).

5. Para cualesquiera fbfs, α y β, y para cualquier $mu_i \in MU$, V ($(\alpha \vee \beta)$, mu_i) = 1 SI tanto V (α, mu_i) como V (β, mu_i) están definidos y o bien V (α, mu_i) = 1 o V (β, mu_i) = 1; y V ($(\alpha \vee \beta)$, mu_i) = 0 SI tanto V (α, mu_i) = 0 como V (β, mu_i) = 0. (De este modo si ya bien V (α, mu_i) o V (β, mu_i) está sin definir, V ($(\alpha \vee \beta)$, mu_i) está también sin definir.

6. Para cualquier fbf, α, cualquier variable individual, **a**, y cualquier $mu_i \in MU$, V ((**a**) α, mu_i) = 1 SI para cada V′ que asigne a **a** cualquier miembro de D_i y sea por lo demás lo mismo que V, V′ (α, mu_i) = 1; y V ((**a**) α, mu_i) = 0 SI existe alguna V′ tal para la cual V′ (α, mu_i) = 0 (De lo contrario V ((**a**) α, mu_i) está sin definir).

7. Para cualquier fbf, α, y para cualquier $mu_i \in MU$, V ($L\alpha$, mu_i) = 1 SI para todo mu_j tal que $mu_i R mu_j$, V (α, mu_j) = 1; y V ($L\alpha$, mu_i) = 0 SI para todo mu_j tal que, V (α, mu_j) está definido y para algún mu_j tal, V (α, mu_j) = 0 (De este modo V ($L\alpha$, mu_i) está sin definir SI para algún mu_j tal, V (α, mu_j) está sin definir).

Obsérvese que, de acuerdo con el requisito de inclusión, α estará definida en mu_i SI está definida en todo mu_j tal que $mu_i R_* mu_j$.

---

122 Este es uno de los modos de tratar fórmulas que contienen símbolos individuales cuyos valores no existen en un mundo dado) *Vide* también págs. 153-154. Para los problemas filosóficos originados por la identificación de un objeto de un mundo con un objeto de otro *vide* Chisholm [1967], Hintikka [1967], págs. 40-45 y Purtill [1968]; también nota número 151.

Una fbf, α, es válida CEP +T SI para todo modelo CEP +T $<$MU, R, D, Q, V$>$, para todo $mu_i \in$ MU, V $(\alpha, mu_i) = 1$ siempre que V (α, mu_i) esté definido (es decir SI V (α, mu_i) no es nunca 0).

Definiciones análogas de modelos CEP +S4 y CEP +S5 se obtienen simplemente añadiendo los requisitos ya conocidos de que para CEP + S4 R sea transitiva y que para CEP + S5 sea simétrica también. La definición de validez será entonces como la de CEP +T.

Todo axioma de CEP + T (o CEP + S4 o CEP + S5), como pudiera ser el caso) es válido en términos de la definición anterior y las reglas de transformación conservan la validez. Dejamos la prueba de esto al lector[123].

Considérese, sin embargo, la fórmula Barcan, en la forma: $(x)\, L\, \phi x \supset L\, (x)\, \phi x$. Tómese un modelo $<$MU, R, D, Q, V$>$ en el cual los elementos se definan como sigue[124]:

MU tiene exactamente dos miembros (distintos) mu_1 y mu_2. Además de $mu_1 R mu_1$ y $mu_2 R mu_2$ tenemos $mu_1 R mu_2$, pero no $mu_2 R mu_1$. D contiene exactamente dos miembros (distintos) u_1 y u_2. Q (mu_1) –es decir D_1– contiene sólo u_1, D_2 contiene tanto a u_1 como u_2. V $(x) = u_1$, mientras que para cualquier variable individual, **a**, que no sea x, V **(a)** $= u_2$. V $(\phi) = \{<u_1, mu_1>, <u_1, mu_2>\}$. Evaluaremos ahora la fórmula Barcan en mu_1.

Para fórmulas atómicas evidentemente tenemos lo siguiente:

(1) V $(\phi x, mu_1) = 1$;

(2) V $(\phi x, mu_2) = 1$;

(3) V $(\phi y, mu_1)$ está sin definir

(4) V $(\phi y, mu_2) = 0$

De acuerdo con (1) y (2), V $(L\, \phi x, mu_1) = 1$. Puesto que u_1 es el único miembro de D_1, cualquier V′ que asigne a x cualquier miembro de D_1 debe asignar el mismo valor a x (a saber u_1) igual que lo hace V. Por tanto para toda V′ tal, V′ $(L\, \phi x, mu_1) =$ V $(L\, \phi x, mu_1)$, lo cual como hemos visto es 1; y así V $((x)\, L\, \phi x, mu_1) = 1$. Volviendo ahora al consecuente de la fórmula Barcan, primero evaluamos $(x)\, \phi x$ en mu_2. Sea V′ $(x)\, u_2$ (que está en D_2). Entonces V′ asigna a x el mismo miembro de D_2 que V asigna a y, y por tanto V′ $(\phi x, mu_2) =$ V $(\phi y, mu_2)$, lo cual (4) da como 0; de aquí que V $((x)\, \phi x, mu_2) = 0$. Mas, puesto que $mu_1 R mu_2$, tenemos entonces V $(L\, (x)\, \phi x, mu_1) = 0$. Por tanto la fórmula Barcan tiene el valor 0 en mu_1, y es por tanto no válida.

Ahora bien el modelo $<$MU, R, D, Q, V$>$ que hemos descrito es a la vez un modelo CEP + T y un modelo CEP + S4. Por tanto la fórmula Barcan no es ni válida-CEP + T ni válida-CEP + S4. Más aún, aquí tenemos una prueba de la independencia de la fórmula Barcan en T +FB y S4 +FB; como hemos indicado, todas las tesis derivables del resto de las bases de esos sistemas son válidas en términos de nuestras presentes definiciones de validez, pero acabamos de ver que la fórmula Barcan no lo es.

El modelo no es, sin embargo, un modelo CEP + S5, porque en él tenemos $mu_1 R mu_2$ pero no $mu_2 R mu_1$, y por tanto R no es simétrica. En realidad podemos demostrar, en términos de nuestra presente semántica, que cuando R es una relación de equivalencia (es decir, reflexiva, transitiva y simétrica), la fórmula Barcan

---

123 Aunque es directa, la prueba depende del requisito de inclusión.

124 Este modelo es una adaptación del usado en Kripke [1963b] pág. 87.

es válida. Demostramos esto mostrando que si R es una relación tal entonces, si el valor del consecuente de la fórmula Barcan en cualquier mundo es 0, el valor del antecedente en aquel mundo es también 0. Comenzamos observando que puesto que R es simétrica, siempre que tengamos $mu_i R mu_j$ tenemos no simplemente $D_i \subseteq D_j$ sino también $D_j \subseteq D_i$ –es decir los dominios de todos los mundos relacionados mediante R son idénticos. Supóngase ahora que para algún $mu_i \in MU$, V $(L\,(x)\,\alpha, mu_i) = 0$. Entonces para algún mu_j tal que $mu_i R mu_j$, V $((x)\,\alpha, mu_j) = 0$. Por tanto para alguna V′ que asigne a x algún miembro de D_j, V′ $(\alpha, mu_j) = 0$. Pero (puesto que R es simétrica) D_j es idéntica al dominio de todo $mu_k \in MU$ tal que $mu_i R mu_k$ (incluyendo el propio mu_i). Por tanto, puesto que V′ define a α en mu_j, lo define en todo mu_k tal; y por consiguiente V′ (α, mu_i) está definido. Pero V′ $(\alpha, mu_j) = 0$; por tanto V′ $(L\,\alpha, mu_i) = 0$; y por tanto V $((x)\,L\,\alpha, mu_i) = 0$.

(Es digno de tenerse en cuenta que puesto que la prueba que acabamos de dar depende de la simetría, pero no de la transitividad, de R, la fórmula Barcan es también válida en CEP + B (*vide* pág. 128) de acuerdo con nuestra presente semántica).

Completitud sin la fórmula Barcan

Demostraremos ahora que CEP + T y CEP + S4 son completos con respecto a estas definiciones de la validez de CEP + T y CEP + S4. Utilizaremos nuevamente una prueba Henkin; es decir, demostraremos utilizando como instrumento conjuntos máximamente consistentes, que puede construirse para cada fórmula consistente un modelo verificador (verifying model). Esta vez, sin embargo, –por una razón que indicaremos en breve– será innecesario introducir las formas-E_M y dar a los conjuntos máximamente consistentes la propiedad-E_M′: La propiedad-E′ utilizada para CEP no modal (pág. 139) será suficiente, aunque, por supuesto, la β de una fórmula-E puede contener ahora operadores modales. (En cualquier caso para demostrar que se podía dar consistentemente a cada conjunto la propiedad-E_M′ utilizábamos la fórmula Barcan (pág. 144) que ahora no tenemos a nuestra disposición). Igual que antes realizamos la prueba de CEP + T y luego indicamos las modificaciones necesarias para CEP + S4.

Demostramos cómo, dada una fbf consistente, α, podemos construir un determinado sistema, Γ, de conjuntos máximamente consistentes. Al igual que antes, comenzamos Γ_1 por $\{\alpha\}$. Sean las variables individuales que aparecen en $\alpha, x_1, \ldots x_n$. Supongamos ahora que todas las *demás* variables individuales están dispuestas en una serie infinita de conjuntos infinitos, cada uno de los cuales ha de estar asociado, en una forma que explicaremos inmediatamente, con uno de los conjuntos máximamente consistentes de Γ. Para mayor simplicidad escribamos cada variable individual mediante x con un subíndice y un sobreíndice; podemos entonces representar los conjuntos de variables individuales como sigue:

$$\mathbf{d}_1 = \{x_1^1, \ldots, x_i^1, \ldots\}$$

.....

$$\mathbf{d}_k = \{x_1^k, \ldots, x_i^k, \ldots\}$$

.....

Sea Λ_1 el conjunto de todas aquellas fbfs de CEP + T todas de cuyas variables individuales o bien aparecen en α o bien son miembros de $\mathbf{d}_1$. Habiendo comenzado Γ_1 por $\{\alpha\}$ luego damos al conjunto la propiedad-E′ añadiendo para cada fbf de la forma $(\exists \mathbf{a})\,\beta$ de Λ_1, una fbf $(\exists \mathbf{a})\,\beta \supset \beta\,[\mathbf{b}/\mathbf{a}]$, siendo la variable de sustitución **b**

nueva en cada caso, obtenida de $\mathbf{d}_1$. Finalmente hacemos al conjunto máximamente consistente para Λ_1; es decir, añadimos sucesivamente todas aquellas fbfs de Λ_1 que podamos añadir consistentemente. Es evidente que aunque Γ_1 no contiene ninguna fórmula con variables individuales que no sean las de α o las de $\mathbf{d}_1$, sin embargo es un conjunto máximamente consistente con respecto a una versión de CEP + T en el cual las variables individuales están especificadas como las de α o las de $\mathbf{d}_1$; y, más aún, los Lemas relevantes del Capítulo 9 son válidos para Γ_1 cuando su aplicación se restringe a las fbfs de Λ_1.

Para cada Γ_i de Γ y para cada fbf de la forma $M\beta$ de Γ_i, formamos un subordinado, Γ_j, del modo siguiente: Sea Γ_j el conjunto k-ésimo construido en Γ. Sea Λ_j el conjunto de todas aquellas fbfs de CEP + T todas de cuyas variables individuales o bien aparecen en α o bien son miembros de cualquiera de los $\mathbf{d}_1$-$\mathbf{d}_k$, incluidos ambos. (Es decir, para cada nuevo conjunto máximamente consistente que construimos añadimos un nuevo conjunto de variables individuales, y las fbfs que ahora tenemos en cuenta son aquéllas cuyas variables son cualesquiera de estas nuevas o cualesquiera de las utilizadas previamente). Comenzamos Γ_j por $\{\beta\}$. Luego añadimos toda fbf, γ, tal que $L\ \gamma \in \Gamma_i$. Mediante la misma prueba que la de T proposicional (pág. 136) el conjunto permanece consistente. Luego damos al conjunto la propiedad-E′ añadiendo para cada fbf de la forma $(\exists \mathbf{a})\ \beta$ de Λ_j una fbf $(\exists \mathbf{a})\beta \supset \beta\,[\mathbf{b}/\mathbf{a}]$ donde la variable de sustitución **b** es nueva en cada caso y obtenida siempre del nuevo conjunto de variables $\mathbf{d}_k$. Puesto que **b** no aparecerá por tanto en la fbf β con la cual fue iniciado el conjunto, ni en ninguna de las γs, el conjunto se mantendrá consistente por las razones dadas en el caso de CEP no modal (pág. 139 y s.). Finalmente hacemos al conjunto máximamente consistente para Λ_j.

Γ es el sistema de todos los conjuntos máximamente consistentes construidos del modo descrito.

Ahora definimos el siguiente modelo CEP + T $<$MU, R, D, Q, V$>$. MU y R son, como en el capítulo anterior, cada Γ_i que esté asociado con algún $mu_i \in$ MU según la forma ya conocida. Sea D el conjunto de las variables individuales (consideradas como objetos). Sea cada Q (mu_i) –es decir cada D_i– el conjunto de las variables individuales en cualquier fbf de Γ_i: es decir el dominio para cada mundo, mu_i, es el conjunto de variables individuales que aparecen en cualquier fbf de Γ_i. (Puesto que si Γ_j está subordinada a Γ_i está construida a partir de Γ_i, el requisito de que si $mu_i R mu_j$, $D_i \subseteq D_j$ queda cumplido automáticamente) V se define como sigue: Para toda variable individual **a**, V (**a**) = **a**, igual que antes. Para toda variable n-ádica ϕ y para todo $\Gamma_i \in \Gamma$, V (ϕ) se define nuevamente igual que antes (pág. 146) pero con el resultado esta vez de que V ($\phi\ (x_1, ..., x_n), mu_i$) tiene el valor 1 SI $\phi\,(x_1, ..., x_n) \in \Gamma_i$, tiene el valor 0 SI cada uno de los $x_1, ..., x_n$ aparece en alguna fbf de Γ_i pero $\phi\,(x_1, ..., x_n) \notin \Gamma_i$, y está sin definir SI al menos uno de los $x_1, ...x_n$ no aparece en ninguna fbf de Γ_i en absoluto.

Ahora tenemos:

TEOREMA 5

Dados MU, R, D, Q *y* V *tal como se definieron anteriormente, para cualquier fbf,* β, *de* CEP + T, *y para cualquier* $mu_i \in$ MU, V (β, mu_i) = 1 *SI* $\beta \in \Gamma_i$.

El lector que haya seguido las pruebas de los teoremas del Capítulo 9 deberá ser capaz de probar por sí mismo éste de ahora. (La nueva característica del presente caso que podría pensarse que causará dificultades es que cada Γ_i es máximamente consistente no con respecto a todas las fbfs de CEP + T sino solamente con respecto a las de Λ_i. Como consecuencia existirán fbfs que no estén en Γ_i pero que sean

consistentes con él, y para tales fórmulas no será válido el Lema 2 (pág. 134), por ejemplo. No obstante debido a la construcción de Γ y las condiciones para V, todas las fbfs tales estarán sin definir en mu_i y por tanto su ausencia de Γ_i no impedirá el establecer el teorema).

Puesto que cada subordinado$_*$ de Γ_i contiene todas las variables de Γ_i, la prueba puede extenderse a S4 del modo indicado en la pág. 146.

Interpretación de los modelos CEP modales

Desde un punto de vista intuitivo los modelos que hemos venido considerando para CEP modal, al igual que los de la I parte para lógica proposicional modal, pueden considerarse como el desarrollo de la idea de la necesidad como verdad no simplemente en el mundo actual sino en todo mundo posible también. Puesto que deseábamos considerar varias restricciones en lo que ha de tomarse como mundo "posible" hemos hablado normalmente de "accesible a" un mundo dado en vez de verdad en todo mundo, aunque, como señalábamos anteriormente, la palabra "accesible" se ofrece deliberadamente a variedad de interpretaciones intuitivas o imaginativas. Ahora bien, es natural considerar al mundo como consistente en un conjunto de objetos con diversas propiedades que permanecen en diversas relaciones entre sí (ignoraremos los problemas metafísicos a que esta noción da lugar) y si nos preguntásemos a nosotros mismos qué tipos de mundos o estados de hechos estábamos dispuestos a imaginar o considerar como posibles, podríamos dar diversas respuestas:

(a) Una de ellas podría ser la de que podríamos imaginar únicamente ciertos mundos que contuviesen exactamente los mismos objetos que el mundo actual contiene, aunque con nuevas propiedades que permanecerían en nuevas relaciones. Podríamos considerar que la semántica del Capítulo 9 expresa este tipo de respuesta, puesto que en cada modelo hay un único dominio que no varía en ningún mundo. Desde el punto de vista de tales modelos, cuando decimos que una proposición es necesaria podemos considerar que esto significa el que no es simplemente verdadera estando las cosas como están, sino que permanecería verdadera aunque las cosas alterasen sus propiedades o relaciones; y, tal como hemos visto, la fórmula Barcan resulta entonces válida para los tres sistemas que consideramos.

(b) Otra respuesta, sin embargo, podría ser, la de que también estábamos dispuestos a imaginar mundos en los cuales no sólo eran distintas las propiedades y relaciones de los objetos actuales, sino que se habían añadido también nuevos objetos. De este modo podríamos quizá imaginar un mundo que tuviese los objetos presentes y además Pegaso, por ejemplo. Los modelos discutidos hasta ahora en el presente capítulo podrían considerarse basados en esta respuesta, ya que en ellos permitimos a cada mundo accesible a un mundo dado que tenga un dominio más extenso. En este caso cuando decimos que una proposición es necesaria queremos decir que continuaría siendo verdadera aunque no sólo las cosas cambiasen sus propiedades o relaciones sino también aunque otras cosas tomasen existencia también; y como hemos visto ahora resulta que la fórmula Barcan no resulta válida, al menos por lo que se refiere a T y a S4.

(c) Una respuesta todavía más liberal sería la de que considerásemos como posibles (con relación a este mundo) no solamente mundos de los tipos que ya hemos indicado, sino también ciertos mundos en los que se habían suprimido algunos de los objetos presentes (se añadiesen o no se añadiesen también algunos). Semánticamente esto significaría que deberíamos abandonar el requisito de que

siempre que $mu_i R mu_j$ $D_i \subseteq D_j$ —es decir que no deberíamos poner restricciones al modo en el que el dominio de un mundo difiera del de otro. Consideraremos en breve algunas de las consecuencias de hacer esto.

Ahora bien, si permitimos que los dominios varíen, ya bien del modo restringido autorizado de acuerdo con la segunda respuesta, o bien de acuerdo con el modo no restringido autorizado por la tercera, se origina la siguiente cuestión: ¿Cuál hemos de decir que es el valor de verdad en un mundo dado de una proposición acerca de algún objeto que no existe en el dominio de ese mundo? ¿Cuál hemos de decir, por ejemplo, que es el valor de verdad en el mundo actual de "Pegaso es mestizo" o "Mr. Picwick vivió en Londres"? Y aquí al parecer podemos elegir: (i) Podríamos decir que en el mundo en cuestión tal proposición no tiene valor de verdad en absoluto; y podemos considerar que la semántica que hemos dado con anterioridad en este capítulo expresa esta respuesta. (ii) Podríamos decir que incluso en el mundo en cuestión tal proposición podría ser verdadera o falsa pero sí tiene *algún* valor de verdad —es decir que la simple ausencia del objeto del dominio no le impide tener un valor de verdad y no establece automáticamente su valor de verdad más de lo que la mera presencia del objeto en el dominio establece su valor de verdad. Daremos ahora una breve reseña de una semántica sugerida por Kripke, que está basada en esta segunda respuesta así como en la tercera respuesta (c) a nuestra cuestión anterior.

La semántica de Kripke para CEP modal

Kripke[125] ha dado una semántica para CEP modal que difiere de la que hemos presentado en este capítulo en dos aspectos:

1. No contiene el requisito de que siempre que $mu_i R mu_j$, $D_i \subseteq D_j$. En otras palabras, ahora decimos simplemente que distintos mundos de MU pueden tener el mismo dominio o pueden tenerlos distintos, y dejamos la cuestión así.

2. En todo modelo, V asigna un valor (1 ó 0) a toda fórmula atómica en todo $mu_i \in$ MU. V (ϕ) se define entonces, igual que antes, como un conjunto de $(n+1)$ múltiplos ordenados, cada uno de ellos de la forma $<u_1, ..., u_n, mu_i>$ en el que todos los $u_1, ..., u_n$ están en D, aunque no hace falta que estén en D_i. Pero esta vez si α es una fórmula atómica la regla para evaluar V (α, mu_i) es simplemente igual que en el capítulo 8 (pág. 129). De este modo, por ejemplo, V $(\phi y, mu_i) = 1$ ó 0 según que $<$V $(y), mu_i> \in$ V (ϕ) o no, sin tener en cuenta si V $(y) \in D_i$ o no, y nunca está sin definir.

En otros aspectos la semántica de Kripke es la misma que la nuestra, dada anteriormente en este capítulo, excepto en que las cláusulas que establecían las condiciones en las cuales las fórmulas no están definidas, son ahora redundantes, ya que si toda fórmula atómica está definida las reglas aseguran que toda fórmula, sin excepción, está definida.

Es digno de tenerse en cuenta que la regla para evaluar las fórmulas cuantificadas (en ambos tipos de semánticas) da V ((a) $\alpha, mu_i) = 1$ SI para toda V′ *que asigne a* **a** *algún miembro de* D_i y sea, por lo demás, lo mismo que V, V′ $(\alpha, mu_i) = 1$. Es decir, en términos intuitivos, estamos interpretando '"todo es ϕ" es verdadero en mu_i' significando que todo *en* D_i es ϕ. Ahora bien, pudiera darse el caso, por supuesto, de que todo en D_i sea ϕ, pero que algún objeto, u_j, que no esté en D_i, no sea ϕ; y si esto es así entonces tendremos V $((x)\, \phi x, mu_i) = 1$, pero (de acuerdo con la semántica de Kripke) V $(\phi y, mu_i) = 0$ si se asigna u_j a y. Puesto que ésta es

---

[125] Kripke [1963b].

una asignación perfectamente posible, tenemos el resultado de que

$$(1)\ (x)\,\phi x \supset \phi y$$

no es válida. Pero (1) es una muestra directa del esquema axiomático ∀1; por tanto la semántica de Kripke invalida a ∀1[126].

La forma en que Kripke trata esta situación puede expresarse del modo siguiente: Aunque (1) no es válida para su semántica,

$$(2)\ (y)\,((x)\,\phi x \supset \phi y)$$

es válida. Denominaremos a (2) la *clausura* (closure) *universal* de (1). En general si α es una fbf cuyas variables libres son $x_1, \ldots, x_n$, diremos que

$$(x_1) \ldots (x_n)\,\alpha$$

—es decir la fórmula obtenida ligando cada variable libre de α mediante un cuantificador universal al principio— es la clausura universal de α. (Denominaremos a una fórmula que no tenga ninguna variable libre fórmula *cerrada*; y es conveniente hablar de una fórmula cerrada como la clausura universal de sí misma). Ahora bien, la semántica de Kripke hace válida, no toda muestra de ∀1, sino la clausura universal de toda muestra de ∀1; y lo mismo aplica a todo teorema derivado mediante ∀2. Por tanto, Kripke se ve llevado a utilizar una axiomatización del CEP no modal en la cual los esquemas axiomáticos producen solamente fórmulas cerradas como teoremas. Ninguna de las fórmulas con variables libres que son teoremas en la versión de CEP presentada en el capítulo 8, por tanto, son teoremas en la versión de Kripke; en todos los casos, sin embargo, sus clausuras universales lo son, y todas estas fórmulas cerradas son válidas en términos de su semántica.

Ahora bien, es plausible el argüir que, al menos por lo que al CEP no modal se refiere, el estilo de axiomatización de Kripke es tan satisfactorio como el tipo más habitual que presentamos anteriormente. Ya que, según la relación habitual de validez en CEP, una fórmula con variables libres es válida SI su clausura universal es válida; y por tanto bien puede sostenerse que en realidad nada perdemos por tener sólo fórmulas cerradas como teoremas[127]. En cualquier caso, es a una base de este tipo para CEP a la que Kripke adjunta los elementos modales, a saber, A5, A6 y N (junto con A7 para S4 y A8 para S5); y mediante su semántica estos esquemas axiomáticos resultan válidos también y las reglas son preservadoras de la validez.

Lo interesante para nuestro presente punto de vista es que mediante la semántica de Kripke la fórmula Barcan resulta ser no válida incluso en S5 cuantificacional y por tanto no es un teorema cuando el sistema es axiomatizado del modo que acabamos de describir. Su no validez puede demostrarse mediante el siguiente modelo[128]: MU contiene exactamente dos mundos distintos, mu_1 y mu_2. Tenemos $mu_1 \mathrm{R} mu_1$, $mu_2 \mathrm{R} mu_2$, $mu_1 \mathrm{R} mu_2$ y $mu_2 \mathrm{R} mu_1$ (y por tanto el modelo es un

---

126 Se puede, por supuesto, tener una lógica sin ∀ 1. Si añadimos un predicado de "existencia" E (cf. Rescher [1959]) podemos hacer que $\langle u_i, mu_j \rangle \in \mathrm{V}(E)$ SI $u_i \in \mathrm{D}_j$. (Es decir $\mathrm{V}(E\mathbf{a}, mu_j) = 1$ SI $\mathrm{V}(\mathbf{a}) \in \mathrm{D}_j$). En este caso ∀ 1 sería sustituida por $((\mathbf{a})\,\alpha \cdot E\mathbf{b})\,\beta$ donde β es α con **b** libre sustituyendo a **a** libre. A veces E se define en términos de identidad; *vide* Hintikka [1963], págs. 70-71 y Kripke [1963b], pág. 90. Los sistemas de lógica que se separan en este sentido del CEP habitual han sido denominados lógicas "libres" por Lambert ([1963] y en todas las demás fechas). Para una prueba de completitud de la lógica libre *vide* van Fraassen [1966]. Aunque no es necesario unir la lógica libre a la lógica modal el no existente parece dar lugar a más cuestiones en los contextos en que lo que podría existir pero no existe se toma en consideración.

127 Podríamos decir incluso que cuando afirmamos una fórmula con variables libres como teorema lo que estamos implícitamente declarando es que es verdadera para todos los valores de sus variables libres, y el afirmar su clausura universal hace simplemente explícita esta afirmación implícita (Cf. Kripke, op. cit. pág. 89, esp. nota 1).

128 *Vide* Kripke [1963b], pág. 87.

modelo CEP + S5). $D = \{u_1, u_2\}$ $(u_1 \neq u_2)$. $D_1 = \{u_1\}$; $D_2 = \{u_1, u_2\}$. $V(x) = u_1$. $V(\phi) = \{<u_1, mu_1>, <u_1, mu_2>\}$. Evaluemos ahora en mu_1, la fórmula Barcan en la forma

$$(x)\ L\,\phi x \supset L\,(x)\,\phi x$$

Evidentemente mediante las definiciones de D_1, D_2 y V tenemos:

$$(1)\ V(\phi x, mu_1) = 1$$

y

$$(2)\ V(\phi x, mu_2) = 1$$

y, por tanto,

$$(3)\ V(L\,\phi x, mu_1) = 1$$

Puesto que u_1 es el único miembro de D_1, tenemos, por tanto, $V'(L\,\phi x, mu_1) = 1$ para todo V' que asigne a x algún miembro de D_1; y por tanto

$$(4)\ V((x)\,L\,\phi x, mu_1) = 1$$

Puesto que, sin embargo, $u_2 \in D_2$ pero $<u_2, mu_2> \notin V(\phi)$ habrá alguna V' que asigne a x algún miembro de D_2 (a saber u_2) y para el cual $V'(\phi x, mu_2) = 0$; por tanto

$$(5)\ V((x)\,\phi x, mu_2) = 0$$

y así pues

$$(6)\ V(L\,(x)\,\phi x, mu_1) = 0$$

A partir de (4) y (6) obtenemos

$$(7)\ V(((x)\,L\,\phi x \supset L\,(x)\,\phi x), mu_1) = 0$$

y éste demuestra que la fórmula Barcan no es válida ni siquiera en CEP + S5.

(Obsérvese, sin embargo, que el modelo que acabamos de estar discutiendo no cumple todas las condiciones que establecimos anteriormente; ya que tenemos $mu_2 R mu_1$ pero no $D_2 \subseteq D_1$).

Otra consecuencia que se deriva de la semántica de Kripke es que la inversa de la fórmula Barcan, que de acuerdo con nuestra semántica anterior era válida incluso en T, no es ahora válida ni siquiera en S5. Para demostrar esto, consideremos un modelo que es idéntico al anterior excepto en que (a) $D_1 = \{u_1, u_2\}$ y $D_2 = \{u_1\}$, y (b) $V(\phi) = \{<u_1, mu_1>, <u_2, mu_1>, <u_1, mu_2>\}$. En este caso tenemos $V'(\phi x, mu_1) = 1$ para toda V' que asigne a x algún miembro de D_1, y por tanto $V((x)\,\phi x, mu_1) = 1$. De modo semejante tenemos $V((x)\,\phi x, mu_2) = 1$ y por consiguiente:

$$(8)\ V(L\,(x)\,\phi x, mu_1) = 1$$

Pero si V' asigna u_2 a x tenemos $V'(\phi x, mu_2) = 0$ (ya que $<u_2, mu_2> \notin V(\phi)$), y por tanto $V'(L\,\phi x, mu_1) = 0$. Por consiguiente, puesto que V' asigna a x algún miembro de D_1, tenemos:

$$(9)\ V((x)\,L\,\phi x, mu_1) = 0$$

y (8) y (9) dan entonces

$$(10)\ V((L\,(x)\,\phi x \supset (x)\,L\,\phi x), mu_1) = 0$$

lo cual muestra que la inversa de la fórmula Barcan no es válida ni siquiera en S5 y *a fortiori* en T y en S4.

Puesto que, como señalábamos anteriormente, todas las tesis de la versión axiomática del CEP modal de Kripke son válidas de acuerdo con su semántica, nos encontramos con la consecuencia de que ni la fórmula Barcan ni su inversa son teoremas en sus sistemas.

Hay una importante moraleja, que puede servir de advertencia, que se deriva de

todo esto, para la teoría axiomática en general. Como hemos visto nuestras bases para CEP modal y las de Kripke son idénticas en sus partes modales y se diferencian únicamente en la base CEP (no modal) a la cual estos elementos modales se adjuntan. Más aún, por lo que se refiere al CEP no modal nuestro sistema y el suyo se diferencian únicamente en lo que es, en cierto sentido, el trivial aspecto de que cuando una fórmula que contiene variables libres es un teorema para nosotros, para él aunque no es un teorema su clausura universal sí lo es; de este modo las tesis *cerradas* son precisamente las mismas en ambos sistemas. Ahora bien, bien podríamos esperar que cuando añadimos elementos modales idénticos a estas bases ésta continuaría siendo la única diferencia entre los dos sistemas. Pero acabamos de ver que no ocurre así, ya que la fórmula Barcan y su inversa son ambas fórmulas cerradas. De hecho, es debido a la ausencia, en el sistema de Kripke, de ciertas fórmulas no modales *abiertas* lo que impide la derivación de estas fórmulas modales *cerradas*[129].

En la parte III nos tropezaremos con más ejemplos de los peligros que pueden ocultarse tras la, al parecer, inocente frase "únase a alguna base para el sistema S"...

Modalidad *de dicto* y modalidad *de re*

En relación con las fórmulas que contienen tanto cuantificadores como operadores modales algunos lógicos han distinguido entre lo que ellos denominan modalidad *de dicto* y modalidad *de re*[130]. Para ilustrar esta distinción, consideremos la fórmula Barcan una vez más. Su consecuente, a saber,

$$(1)\ L\,(x)\,\phi x$$

dice que es una verdad necesaria el que todo sea ϕ; su antecedente, a saber

$$(2)\ (x)\,L\,\phi x$$

dice que todo es necesariamente ϕ. (1) se dice que expresa una modalidad *de dicto* y (2) una modalidad *de re*. Se explican a menudo estos términos diciendo que en una modalidad *de dicto* la necesidad (o la posibilidad) se atribuyen a una proposición (o *dictum*), pero que en una modalidad *de re* se atribuye a la posesión de una propiedad por una cosa (*res*): de este modo al afirmar (assert) una modalidad *de dicto* estamos diciendo que cierta proposición está obligada (bound) a ser (o puede ser) verdadera, mientras que al afirmar una modalidad *de re* estamos diciendo que cierto objeto está obligado a tener (o puede tener) cierta propiedad. Pero aunque esta explicación esté de acuerdo con los significados literales de las frases latinas, no parece dar una relación satisfactoria de la diferencia de significado entre (1) y (2); ya que incluso en (2) el argumento de L es una expresión proposicional ($\phi\,x$), como quizá veamos mejor si traducimos (2) más ampliamente como "Para todo valor de x, es una verdad necesaria el que x es ϕ"[131]. Desde un punto de vista for-

---

129 Si el lector realiza la prueba de la fórmula de Barcan en CEP+S5 dada en las págs. 127-128, utilizando únicamente las clausuras universales de las tesis verá que la prueba no puede completarse.

130 *Vide* por ejemplo Von Wright [1951], págs. 25-28; Prior [1955], págs. 209-215. Las expresiones "*de dicto*" y "*de re*" se derivan de la lógica medieval, pero aquí no investigaremos las diferencias entre su uso medieval y su uso moderno (Cf. Kneale [1962a]).

131 La explicación que hemos mencionado sugiere con fuerza, de hecho, una distinción que nuestro simbolismo no es capaz de expresar, aunque podría modificarse para que lo hiciera, a saber la distinción entre tomar (i) una *proposición* y (ii) simplemente un *predicado* como argumento de L o M. Introduciendo nuevos paréntesis para señalar esta distinción podríamos considerar que $L\,(\phi x)$ significa "es una verdad necesaria que x es ϕ" y $L\,(\phi)\,x$ significa "x tiene la propiedad de ser necesariamente ϕ". El decidir si se le puede o no puede dar sentido satisfactorio

mal la característica de (2) que ha llevado a que se le denominase modalidad *de re* es que la expresión dentro del ámbito del operador modal contiene una variable individual libre[132] Para nuestros presentes propósitos definiremos la modalidad *de dicto* y *de re* como sigue:

Una fbf, α, que contenga un operador modal (L o M) se dirá que expresa una modalidad *de re* SI el ámbito de algún operador modal de ella contiene alguna aparición libre de una variable individual; de lo contrario se dirá que α expresa una modalidad *de dicto*.

Ejemplos de fórmulas que expresan modalidades *de re* serían $(\exists x)\ L\ \phi x$, $(x)\ M\ \phi x$, $(x)\ L\ (y)\ \phi xy$, así como también, por supuesto, (2) de antes.

Ha sido sugerido, por ejemplo por Von Wright[133] que en una lógica modal de predicados satisfactoria todas las modalidades *de re* serían eliminables en favor de modalidades *de dicto*. Lo que esta sugerencia viene a indicar es que para toda fbf, α, que contenga una modalidad *de re*, deberíamos de ser capaces de construir una una fbf, α', que no contenga ninguna modalidad *de re*, y que se pruebe equivalente a α, es decir que sea tal que $\vdash (\alpha \equiv \alpha')$. Ahora bien, es casi seguro que incluso en el más prometedor de los sistemas que hemos examinado (a saber CEP + S5 tal como se axiomatizó en el Capítulo 8) no puede hacerse esto– aunque de hecho nadie parece realmente haber demostrado esta imposibilidad. Y Von Wright no sostiene que esto puede hacerse en ninguno de estos sistemas. Lo que él sí sugiere es que esto podría hacerse si adoptásemos como tesis lo que él denomina Principio de Predicación (Principle of Predication)[134]. De acuerdo con este principio todas las propiedades pueden dividirse en dos tipos: (a) aquéllas cuyo pertenecer a un objeto es siempre o bien necesario o bien imposible, y que podemos denominar propiedades *formales*; y (b) aquéllas cuyo pertenecer a un objeto es siempre contingente, nunca una cuestión de necesidad o imposibilidad, y a las que podemos denominar propiedades *materiales*. Si ϕ es una propiedad formal tenemos por tanto: $(x)\ (L\ \phi x \vee L \sim \phi x)$; y si ϕ es una propiedad material tenemos: $(x)\ (M\ \phi x \cdot M \sim \phi x)$. Así pues podemos formular el Principio de Predicación como sigue[135]:

$$(x)\ (L\ \phi x \vee L \sim \phi x) \vee (x)\ (M\ \phi x \cdot M \sim \phi x)$$

Podemos generalizar esto en un esquema que se adecue al estilo de axiomatización que hemos estado utilizando:

$$\textbf{Pr}\quad (a)\ (L\ \alpha \vee L \sim \alpha) \vee (a)\ (M\ \alpha \cdot M \sim \alpha)$$

siendo **a** cualquier variable individual y α cualquier fbf.

Como demostraremos posteriormente el Principio de Predicación no es una tesis ni siquiera de CEP+S5. Podría, sin embargo, añadirse consistentemente a CEP + S5 como axioma extra, para proporcionar un sistema que denominaremos CEP+S5+Pr,

---

a esta distinción es una difícil cuestión; pero si se le puede dar, sería interesante tarea la de descubrir bases axiomáticas para sistemas en las que pudiese expresarse la distinción (*vide infra* nota número 151).

132 Por supuesto x no está libre en la totalidad de (2); pero está libre en ϕx, que constituye el ámbito (scope) de L. En (1), como contraste, el ámbito de L es $(x)\phi x$, en el cual x no está libre.

133 Von Wright [1951], págs. 26-28.

134 Von Wright no hace quizás esta sugerencia explícitamente del todo, pero esto es lo que consideramos sustancial en sus observaciones; e incluso si lo hemos interpretado mal la sugerencia en sí es digna de discusión.

135 Von Wright no formula el Principio de Predicación en términos simbólicos. Para una formulación sólo diferente de la nuestra en lo trivial *vide* Prior [1955], pág. 211.

y podemos ahora formular la cuestión de si en este sistema todas las modalidades *de re* son eliminables.

Von Wright en realidad no demuestra que lo sean, en el sentido que hemos definido. Lo que él demuestra es un resultado más restringido (weaker) aunque relacionado con lo anterior, el cual, adaptando ligeramente su argumentación, podíamos expresar diciendo que en CEP + S5 + Pr podemos derivar:

$$(3)\ (L\,\alpha=\alpha) \vee (L\,\alpha=(\beta \cdot \sim\beta))$$

siendo α y β fbfs cualesquiera —y en particular podemos hacer que β sea alguna fbf arbitraria que no contenga ninguna modalidad *de re*.

En esquema la prueba de (3) es ésta. Incluso sin Pr podemos derivar fácilmente:

$$(4)\ (a)\,(L\,\alpha \vee L \sim\alpha) \supset (L\,\alpha=\alpha)$$

y

$$(5)\ (a)\,(M\,\alpha \cdot M \sim\alpha) \supset (L\,\alpha=(\beta \cdot \sim\beta))$$

a partir de lo cual, de acuerdo con CP, obtenemos:

$$(6)\ ((a)\,(L\,\alpha \vee L \sim\alpha) \vee (a)\,(M\,\alpha \cdot M \sim\alpha)) \supset ((L\,\alpha=\alpha) \vee (L\,\alpha=(\beta \cdot \sim\beta)))$$

a partir de lo cual a su vez, si tenemos a Pr como axioma, obtenemos (3) mediante MP.

Ahora bien, si α contiene una variable individual libre, entonces la parte izquierda de cada equivalencia de (3) contiene una modalidad *de re* y en la parte derecha no aparece esa modalidad; sin embargo (3) no nos permite automáticamente eliminar modalidades *de re*. No debe confundirse (3) con:

$$(7)\ L\,\alpha=(\alpha \vee (\beta \cdot \sim\beta))$$

que no es una tesis en absoluto. (Si suponemos a (7) derivable de (3) es probablemente porque imaginamos erróneamente que $((p=q) \vee (p=r)) \supset (p=(q \vee r))$ es una tesis de S5). Si (7) *fuese* una tesis podríamos, desde luego, utilizarla para eliminar modalidades *de re* muy sencillamente sustituyendo $L\,\alpha$ siempre que fuese necesario por $\alpha \vee (\beta \cdot \sim\beta)$ —o más sencillamente todavía por su evidente equivalente, la propia α.

Tampoco debe confundirse (3) con la proposición (statement) metalógica:

$$(8)\ \text{O bien} \vdash (L\alpha=\alpha)\ \text{o} \vdash (L\alpha=(\beta \cdot \sim\beta))$$

(Que el paso de (3) a (8) es ilegítimo puede verse fácilmente por el hecho de que en CP tenemos $\vdash (p \vee \sim p)$ pero no ni $\vdash p$ ni $\vdash \sim p$). Aunque tuviésemos (8), sin embargo, no se seguiría que todas las modalidades *de re* pudiesen ser eliminadas; ya que todo lo que (8) nos asegura es que para toda modalidad *de re* una u otra de las dos equivalencias es una tesis. Cada una de éstas, si se da como tesis, permitiría desde luego que la modalidad en cuestión fuese eliminada, pero al parecer no contamos con ningún método efectivo que nos diga, a partir de la fórmula únicamente cuál de las equivalencias es una tesis, y no está claro en absoluto cómo podríamos contar con él.

De hecho parece ser que nadie ha demostrado que la adición del Principio de Predicación[136] a CEP + S5 permitiría que todas las modalidades *de re* fuesen eliminadas. Por otra parte nadie parece haber demostrado que no lo permitiría. Es cierto que ni siquiera con la ayuda de Pr podemos derivar, por ejemplo

$$(9)\ (\exists x) L\phi x \equiv L(\exists x)\phi x$$

---

136 O, por lo que a esto se refiere, del enunciado relacionado, aunque distinto (8).

y ya hemos comentado la no validez de esta fórmula[137]. Pero esto sólo no prueba la no eliminabilidad de las modalidades *de re*, ya que podría existir alguna otra fórmula que no fuese $L\,(\exists x)\,\phi x$ (quizá una mucho más compleja) que no contuviese ninguna modalidad *de re*, que se demostrase que sea equivalente a $(\exists x)\,L\,\phi x$, y por todo lo que hemos dicho podría existir un método efectivo para construir una fórmula tal para toda modalidad *de re*. Nuestra conjetura es, sin embargo, en lo que pueda valer, de que no existe tal método efectivo, ni siquiera en CEP + S5 + Pr.

Señalábamos anteriormente que el Principio de Predicación no es una tesis de CEP + S5. Podemos demostrar esto mediante el siguiente modelo del CEP + S5, en el cual Pr tiene el valor 0 en mu_1: MU = $\{mu_1, mu_2\}$; D = $\{u_1, u_2\}$; V $(x) = u_1$, V $(\phi) = \{<u_1, mu_1>, <u_1, mu_2>, <u_2, mu_1>\}$[138]. Supongamos que $V'(x) = u_2$, pero que por lo demás V′ es lo mismo que V.

Consideramos Pr en la forma un tanto más conveniente

$$(x)\,(L\,\phi x \vee L \sim \phi x) \vee (x)\,(M\,\phi x \cdot \sim L\,\phi x)$$

Ahora bien, a partir del modelo y de la definición de V′ tenemos evidentemente:

$$\text{(i)}\quad V\,(\phi x, mu_1) = 1$$

$$\text{(ii)}\quad V\,(\phi x, mu_2) = 1$$

$$\text{(iii)}\quad V'\,(\phi x, mu_1) = 1$$

$$\text{(iv)}\quad V'\,(\phi x, mu_2) = 0$$

Mediante (iii) y (iv) tenemos $V'\,(L\,\phi x, mu_1) = 0$ y $V'\,(L \sim \phi x, mu_1) = 0$, por tanto $V'((L\,\phi x \vee L \sim \phi x), mu_1) = 0$, y por tanto a su vez $V'\,((x)\,(L\phi x \vee L \sim \phi x), mu_1) = 0$; de acuerdo con (i) y (ii) tenemos $V\,(L\,\phi x, mu_1) = 1$, por tanto $V\,(\sim L\,\phi x, mu_1) = 0$, por tanto $V\,((M\,\phi x \cdot \sim L\,\phi x), mu_1) = 0$; y esto proporciona $V\,((x)\,(M\,\phi x \cdot \sim L\,\phi x), mu_1) = 0$. Estos dos resultados evidentemente proporcionan $V\,(\mathbf{Pr}, mu_1) = 0$.

Se plantea ahora la siguiente cuestión: ¿podemos proporcionar una semántica para CEP + S5 + Pr? Para hacerlo tendríamos que modificar nuestra explicación de los modelos CEP + S5 y de la validez de CEP + S5, de modo que no sólo las tesis de CEP + S5 fuesen válidas sino también Pr lo fuese. Lo que hace falta que cambiemos es la regla para asignar un valor a una variable predicativa —todo lo demás puede continuar tal como se estableció para CEP + S5 en la pág. 128 y s. Si ϕ es monádico tenemos, para un modelo CEP + S5 + Pr, que restringir V (ϕ) a un conjunto de pares ordenados, cada uno de ellos de la forma $<u_i, mu_j>$, que satisfagan *una u otra* de las siguientes condiciones: (i) todo miembro de D está emparejado (paired) con todo miembro de MU o con ninguno; (ii) todo miembro de D está a la vez emparejado con algún miembro de MU y no emparejado con ningún otro miembro de MU. (De este modo, por tomar un caso simple, si MU = $\{mu_1, mu_2\}$ y D = $\{u_1, u_2\}$, podríamos tener V $(\phi) = \{<u_1, mu_1>, <u_1, mu_2>$, satisfaciendo la condición (i) ya que u_1 está emparejado con mu_1 y mu_2 y u_2 no está emparejado con ninguno de estos dos; o V $(\phi) = \{<u_1, mu_1>, <u_2, mu_2>\}$, satisfaciendo la condición (ii) ya que u_1 está emparejado con mu_1 pero no con mu_2 y u_2 está emparejado con mu_2 pero no con mu_1; pero no

---

137 *Vide supra* pág. 127. Cf. Prior [1955], págs. 211-214. Parece ser que Prior considera que la invalidez de (9) demuestra automáticamente la no eliminabilidad de las modalidades *de re* (si no llega a afirmarlo explícitamente, desde luego se acerca mucho a ello).

138 Puesto que estamos tratando con S5 no hace falta que tengamos en cuenta una relación R.

$V(\phi) = \{<u_1, mu_1>, <u_1, mu_2>, <u_2, mu_1>\}$ –que es, incidentalmente, la asignación que utilizamos anteriormente para hacer a Pr falso en CEP + S5 –ya que ésta no satisfaría ninguna de las condiciones). Si ahora consideramos a Pr en su forma más simple, a saber

$$(x)(L\phi x \vee L \sim \phi x) \vee (x)(M\phi x \cdot M \sim \phi x)$$

nos encontraremos que toda asignación de valor a ϕ para la cual sea válida la condición (i) proporciona un modelo que satisface el primer miembro de la disyunción, y toda asignación de valor a ϕ para la cual sea válida la condición (ii) proporciona un modelo que satisface el segundo miembro de la disyunción. En el primer caso el modelo representa a ϕ como predicado formal y en el segundo como material. Restricciones análogas, aunque más complicadas, tendrían que hacerse a las asignaciones a variables predicativas de grado mayor. Obtendríamos de este modo una semántica que haría válido a Pr en su forma general. Más aún, puesto que los modelos CEP + S5 + Pr son claramente un subconjunto de los modelos CEP + S5 todas las tesis de CEP + S5 seguirían siendo válidas. También sería posible utilizar una prueba Henkin para demostrar la completitud de CEP + S5 + Pr.

CAPITULO XI

IDENTIDAD Y DESCRIPCION EN CEP MODAL

CEP con identidad

Un CEP no modal tal como el que hemos descrito se amplía a menudo mediante la introducción de un predicado primitivo diádico constante que representa la identidad. Para este predicado usamos el símbolo =, que escribimos entre sus argumentos[139]. (Así tenemos $x = y$ como una posible sustitución de ϕxy). La interpretación propuesta es la de que $x = y$ ha de significar que x es el mismo individuo que y; la lectura más indicada es "x es idéntico a y". Generalmente abreviamos $\sim(\mathbf{a} = \mathbf{b})$ como $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$.

Añadimos a la base de CEP los dos siguientes esquemas de axiomas en los que **a** y **b** son variables individuales cualesquiera

I1 $\mathbf{a} = \mathbf{a}$

I2 $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \supset (\alpha \supset \beta)$, difiriendo α y β únicamente en que en uno o más lugares cuando α tiene **a** libre, β tiene **b** libre.

CEP modal con identidad

Podemos hacer las mismas adiciones a cualquiera de los sistemas de predicados modales que hemos considerado[140]. Denominaremos a T + FB, S4 + FB y CEP + S5 con la adición de I1 y I2: T + I, S4 + I y S5 + I, respectivamente. En los sistemas así obtenidos α y β en I2 pueden ser, por supuesto, fbfs que contengan operadores modales.

Entre los teoremas que ahora podemos derivar figuran dos que, de acuerdo con la interpretación propuesta, pudieran parecer intuitivamente no aceptables. El primero de ellos es derivable incluso en T + I:

LI $(x = y) \supset L\,(x = y)$[141]

---

139 En CEP = es primitivo. En un cálculo de predicados de segundo orden (es decir uno en el que aplicamos la cuantificación tanto a variables predicativas como a variables individuales) podría introducirse mediante la definición:

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b}) =_{\mathrm{Df}} (\phi)(\phi\,\mathbf{a} \supset \phi\,\mathbf{b})$$

A la identidad se le denomina frecuentemente *Igualdad* (equality), especialmente para sistemas de CEP cuya pretendida interpretación es matematica. El uso del mismo símbolo para la identidad y para la equivalencia estricta no debe dar lugar a confusión, ya que los argumentos del signo de identidad son siempre variables individuales y los de la equivalencia estricta son siempre fbfs. (Nuestro uso frecuente de = como símbolo metalógico, como cuando escribimos "$V(\phi x) = 1$" significando que el valor asignado a x por V es 1, tampoco debe originar confusión).

140 Sólo discutiremos sistemas que contengan la fórmula Barcan aunque muchas de nuestras conclusiones aplicarán probablemente a los sistemas correspondientes sin ella.

141 Cf. Prior [1955], pág. 205 y Barcan [1947]. Barcan deriva el teorema en S2

PRUEBA

I2:	(1)	$(x=y) \supset (L\,(x=x) \supset L\,(x=y))$
(1) x Perm:	(2)	$L\,(x=x) \supset ((x=y) \supset L\,(x=y))$
I1 x N:	(3)	$L\,(x=x)$
(3), (2) x MP:	(4)	$(x=y) \supset L\,(x=y)$ **Q.E.D.**

(En esta prueba (1) se obtiene a partir de I2, tomando α como $L\,(x=x)$ y sustituyendo la segunda aparición (libre) de x por y libre).

El segundo teorema está en íntima relación con LI pero es derivable únicamente en S5 + T, no en sistemas más débiles (weaker).

LNI $(x \neq y) \supset L\,(x \neq y)$[142]

La prueba es a partir de LI mediante Transp, ILM y RD5.

Lo que LI significa es que siempre que x e y sean el mismo objeto es una verdad necesaria el que lo son, o que todo enunciado verdadero de identidad es necesariamente verdadero, o que no existe ningún enunciado verdadero de identidad contingente. Ahora bien parece fácil pensar en contra-ejemplos de esto. Por ejemplo, la sentencia:

(1) El hombre que vive en la casa de al lado es el alcalde

parece afirmar una identidad entre el hombre que vive en la casa de al lado y el alcalde; y si así fuese podríamos volver a escribir (1), semi-formalmente, como:

El hombre que vive en la casa de al lado = el alcalde

Sin embargo, con toda seguridad, puede decirse, esto es contingente, porque es lógicamente posible que el hombre que vive en la casa de al lado no fuese el alcalde. O, usando un ejemplo clásico[143], aunque la estrella matutina es de hecho el mismo cuerpo que la estrella vespertina, ésta es una verdad contingente de la astronomía y no una verdad necesaria de la lógica. Por tanto si hemos de considerar a LI válido tendremos que demostrar que casos como éstos no son genuinos contra-ejemplos.

Una forma de hacerlo sería construir (1) de tal modo que sí expresase una verdad necesaria. Ahora bien es contingente el que el hombre que es de hecho el hombre que vive en la casa de al lado sea el hombre que vive en la casa de al lado, ya que podría haber vivido en cualquier otra parte; es decir, *el vivir en la casa de al lado* es una propiedad que pertenece contingentemente, no necesariamente, al

---

cuantificacional (para S2 *vide infra*, Capítulo 12); ella también deriva el teorema más fuerte $(x = = y) \neg \exists L(x = y)$ en S4 (por supuesto puede ser derivado mediante N en T, pero éste no es uno de los sistemas que ella discute). También podríamos demostrar LI como el esquema $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \supset L(\mathbf{a} = \mathbf{b})$, donde **a** y **b** son variables individuales cualesquiera.

142 También podemos, por supuesto, demostrar el correspondiente esquema:
$$(a \neq b) \supset L(a \neq b)$$

143 Aunque este ejemplo data de Frege [1892] las dificultades para la lógica de predicados modal hacia las cuales llama la atención fueron señaladas por primera vez por Quine [1947] y desde entonces han sido presentadas por él vigorosamente en [1953] [1960] y [1966]. No es intención nuestra entrar en la discusión de los problemas filosóficos que rodean toda esta área, y limitaremos las observaciones filosóficas que hagamos a aquéllas que tengan que ver directamente con la interpretación de los sistemas modales. Aquellos interesados en discusiones más amplias, que en modo alguno sugerimos que carezcan de importancia, pueden consultar los siguientes autores, además de los textos de Quine: Donnellan [1966], Geach [1963] Hintikka [1961] [1963], Kanger [1957b], Kenny [1963], Linsky [1966], Prior [1963b], [1963c], Rundle [1965], Slater [1963]. (No se pretende que esta lista sea completa o definitiva).

hombre al que pertenece. Y de modo semejante, es contingente el que el hombre que de hecho es el alcalde sea el alcalde; ya que cualquier otra persona podría haber sido elegida en su lugar. Pero si entendemos (1) significando que el objeto que (como realidad contingente) posee la propiedad de ser el hombre que vive en la casa de al lado es idéntico al objeto que (como realidad contingente) posee la propiedad de ser el alcalde, entonces lo estamos entendiendo como afirmando que un objeto determinado (descrito de varios modos) es idéntico a sí mismo, y en esto no hace falta que disputemos acerca de su consideración como verdad necesaria. Esto nos proporcionaría un modo de construir enunciados de identidad que hace a LI perfectamente aceptable: ya que siempre que $x = y$ sea verdadero podemos considerarlo como expresando la verdad necesaria de que un determinado objeto es idéntico a sí mismo.

Es también al menos discutible el que intuitivamente LI y LNI vayan o no vayan juntos y que si un sistema modal satisfactorio ha de contener LI contenga también LNI. Como hemos visto ambos están en S5 + I, pero solamente LI está en T + I y S4 + I. Podríamos, sin embargo, consistentemente, añadir LNI como axioma extra a cualquiera de estos sistemas más débiles sin hacerlo tan fuerte como S5 + I (Por supuesto habríamos de añadirlo en la forma del esquema

$$(\mathbf{a} \neq \mathbf{b}) \supset L\ (\mathbf{a} \neq \mathbf{b})$$

al cual nos referiremos también como LNI). Podemos, de este modo, tener dos versiones de T + I, una obtenida añadiendo simplemente I1 e I2 y la otra añadiendo LNI también a la base de T + FB; y lo mismo es válido para S4 + I. Denominaremos a estas últimas versiones, T + LNI y S4 + LNI, reservando los nombres de T + I y S4 + I para los sistemas sin LNI.

Tenemos aquí una situación paralela a la que nos encontramos con relación a la fórmula Barcan (pág. 127). La inversa de esa fórmula, se recordará, estaba, como LI en los tres sistemas tal como se formulaban originalmente, pero la propia fórmula Barcan, al igual que LNI, estaba solamente en CEP + S5, aunque podía ser añadida a cualquiera de los sistemas más débiles. La semejanza llega todavía más lejos que esto: también podemos modificar los sistemas con identidad de modo que ninguno de ellos contenga ni a LNI ni a LI, al igual que las axiomatizaciones de Kripke de los cálculos de predicados modales no nos daban ni la fórmula Barcan ni su inversa (págs. 154 y ss.).

La semántica del CEP modal con identidad

Comenzamos por los sistemas que contengan LNI (como axioma en T + LNI y S4 + LNI, como teorema en S5 + 1). También podemos definir la validez para estos sistemas simplemente añadiendo a las definiciones de los modelos de la pág. 129, la regla:

[V =]. Para variables individuales cualesquiera **a** y **b**, y para cualquier $mu_i \in$MU, V $((\mathbf{a} = \mathbf{b}), mu_i) = 1$ ó 0 según V $(\mathbf{a}) = (\mathbf{b})$ o no.

(De acuerdo con esta regla, $(x = y)$ ha de considerarse verdadero cuando y sólo cuando x e y tengan asignado el mismo objeto; esto está, evidentemente, de acuerdo con la interpretación de $(x = y)$ significando "x es el mismo objeto que y". En efecto, puesto que = es un predicado diádico, estamos definiendo V (=) como el conjunto de triples $<u, u, mu_i>$ para cada $u \in$ D y $mu_i \in$MU).

La definición de validez es, entonces, como anteriormente.

Evidentemente la simple adición de la regla para la identidad no puede afectar a la validez de las fórmulas que no contengan al operador de identidad. Más aún,

siempre que tengamos V $((\mathbf{a} = \mathbf{b}), mu_i) = 1$ tenemos V $(\mathbf{a})$ = V $(\mathbf{b})$ y por tanto V $((\mathbf{a} = \mathbf{b}), mu_j) = 1$ para cada $mu_j \in$ MU, es decir V $(L\ (\mathbf{a} = \mathbf{b}), mu_i) = 1$. De modo semejante, siempre que tengamos V $((\mathbf{a} = \mathbf{b}), mu_i) = 0$ (es decir, V $(\mathbf{a} \neq \mathbf{b}), mu_i) = 1$), tenemos V $((\mathbf{a} = \mathbf{b}), mu_j) = 0$ (es decir V $((\mathbf{a} \neq \mathbf{b}), mu_j) = 1$) para cada $mu_j \in$ MU, y por tanto V $(L\ (\mathbf{a} \neq \mathbf{b}), mu_i) = 1$. Así pues, esta semántica hace válidos a LI y LNI en todos los sistemas. La validez de I1 es evidente, ya que V $(\mathbf{a})$ = V $(\mathbf{a})$. I2 es igualmente válido, ya que si V $((\mathbf{a} = \mathbf{b}), mu_i) = 1$, entonces α y β difieren sólo con respecto a alguna variable libre a la que se asigna el mismo valor; por tanto si V $(\alpha, mu_i) = 1$, V $(\beta, mu_i) = 1$. Por consiguiente, todas las tesis de T + LNI, S4 + LNI y S5 + I son válidas de acuerdo con nuestra presente semántica.

Para probar la completitud de estos sistemas volvemos a construir nuevamente un sistema de conjuntos máximamente consistentes, Γ, tal como se describió en la pág. 142 y ss. haciendo a cada Γ_i consistente, desde luego, con relación a los sistemas ampliados con los axiomas para la identidad. Al hacer una asignación de valor que produzca el resultado de que V $(\alpha, mu_i) = 1$ SI $\alpha \in \Gamma_i$, sin embargo, nos tropezamos con una complicación. Nuestro plan anterior era el de asignarle a cada variable individual, **a**, ella misma (considerada como un objeto). Pero este plan no nos servirá aquí, ya que al ser x e y, por ejemplo, variables distintas tendrán asignados distintos valores y tendríamos, por tanto, siempre V $((x = y), mu_i) = 0$, con independencia de que $(x = y) \in \Gamma_i$ o no. Una forma de vencer esta dificultad es la siguiente: Seguiremos asignando a cada variable individual alguna variable individual (considerada como un objeto), pero esta vez no necesariamente ella misma. En lugar de ello hacemos la asignación de este modo: Supongamos que todas las variables individuales están dispuestas en un orden determinado. Sea **b** cualquiera de estas variables individuales. Si existe alguna variable, **a**, que aparezca *anteriormente* en la ordenación, tal que $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \in \Gamma_i$, entonces le asignamos a **b** no ella misma sino la variable previamente asignada a **a**, es decir hacemos que V $(\mathbf{b})$ = V $(\mathbf{a})$. Si, no obstante, no existiese tal variable anterior, entonces hacemos simplemente que V $(\mathbf{b})$ sea la propia **b** igual que antes. Esta asignación nos asegurará que siempre que cualquier fbf de la forma $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \in \Gamma_1$, entonces V $(\mathbf{a})$ es lo mismo que V $(\mathbf{b})$, y por tanto V $((\mathbf{a} = \mathbf{b}), mu_1) = 1$. También nos asegurará lo inverso, a saber, que siempre que V $((\mathbf{a} = \mathbf{b}), mu_1) = 1$, $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \in \Gamma_1$, por la siguiente razón: SI V $((\mathbf{a} = \mathbf{b}), mu_1) = 1$, entonces de acuerdo con [V =], V $(\mathbf{a})$ es lo mismo que V $(\mathbf{b})$; pero de acuerdo con la naturaleza de la asignación esto sólo puede ocurrir así porque *o bien*:

(i) V $(\mathbf{a})$ y V $(\mathbf{b})$ son cada una de ellas alguna variable individual, **c**, distinta de **a** y **b** tal que $(\mathbf{c} = \mathbf{a}) \in \Gamma_1$ y $(\mathbf{c} = \mathbf{b}) \in \Gamma_1$; en cuyo caso puesto que $\vdash (\mathbf{c} = \mathbf{a}) \supset ((\mathbf{c} = \mathbf{b}) \supset (\mathbf{a} = \mathbf{b}))$, $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \in \Gamma_1$; *o*

(ii) **a** y **b** son variables distintas y a ambas se asigna **a** o a ambas se asigna **b**; ahora bien, esto presupone que o ya bien $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \in \Gamma_1$ o $(\mathbf{b} = \mathbf{a}) \in \Gamma_1$, y por ello, puesto que $\vdash (\mathbf{b} = \mathbf{a}) \supset (\mathbf{a} = \mathbf{b})$, $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \in \Gamma_1$; *o*

(iii) **a** y **b** son la misma variable (digamos **a**) y V $(\mathbf{a})$ es la propia **a**; en cuyo caso, de acuerdo con I1, $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \in \Gamma_1$ una vez más.

Por tanto en todo caso, si V $((\mathbf{a} = \mathbf{b}), mu_1) = 1$, $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \in \Gamma_1$[144].

[144] Este método se denomina a veces método *Lindenbaum* y es de aplicación muy general. Esencialmente muestra que siempre que en un sistema axiomático tengamos unos cuantos símbolos cuyos valores no se distingan en el sistema entonces podemos construir siempre un modelo en el que se les asigne el mismo valor, considerando que algún valor los "representa" a todos ellos. Lo que se utiliza a menudo como este valor es la *clase* de todos los elementos no

Obsérvese en este punto que si $(\mathbf{a} = \mathbf{b})$ está en cualquier Γ_i de Γ está también en todos los demás conjuntos máximamente consistentes de Γ, ya que (i) si $(\mathbf{a}=\mathbf{b}) \in \Gamma_i$, entonces de acuerdo con LI, $L\,(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \in \Gamma_i$, y así si Γ es un subordinado de Γ_i, $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \in \Gamma_j$; y (ii) si $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \notin \Gamma_i$, entonces $(\mathbf{a} \neq \mathbf{b}) \in \Gamma_i$, por tanto, de acuerdo con LNI, $L\,(\mathbf{a} \neq \mathbf{b}) \in \Gamma_i$, por tanto $(\mathbf{a} \neq \mathbf{b}) \in \Gamma_j$, y así $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \notin \Gamma_j$. De este modo aunque la asignación se define para Γ_1 será válida para todo Γ_i; es decir para todo $\Gamma_i \in \Gamma$, $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \in \Gamma_i$ SI $V(\mathbf{a}) = V(\mathbf{b})$ y de este modo $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \in \Gamma_i$ SI $V((\mathbf{a}=\mathbf{b}), mu_i)=1$.

Tenemos que demostrar ahora, sin embargo, que con esta asignación revisada, a variables individuales, $V(\alpha, mu_i) = 1$ SI $\alpha \in \Gamma_i$, no simplemente cuando α es de la forma $(\mathbf{a} = \mathbf{b})$ sino cuando α es una fbf cualquiera; es decir que el Teorema 4 (pág.146) sigue sirviendo. Supóngase que α es una fórmula atómica $\phi(x_1, ..., x_n)$. De acuerdo con la naturaleza de la asignación tendremos $V(x_1)=y_1, ..., V(x_n)=y_n$, siendo $y_1, ..., y_n$ miembros de D (variables individuales) tales que $(x_1 = y_1), ..., (x_n = y_n) \in \Gamma_i$[145]. Ahora bien, $V(\phi(x_1, ..., x_n), mu_i) = 1$ SI $\phi(y_1, ..., y_n) \in \Gamma_i$; pero a partir de I2 podemos derivar fácilmente $((x_1 = y_1) ..... (x_n = y_n)) \supset (\phi(x_1, ..., x_n) \equiv \equiv (\phi(y_1, ..., y_n))$; por tanto $V(\phi(x_1, ..., x_n), mu_i) = 1$ SI $\phi(x_1, ..., x_n) \in \Gamma_i$. Así pues, el Teorema 4 sigue siendo válido para las fórmulas atómicas; y puesto que ya hemos demostrado que es válido para fbfs de la forma $(\mathbf{a} = \mathbf{b})$, la inducción original mostrará que es válido para todas las fbfs.

Sistemas de identidad contingente

Hemos visto que, desde cierta perspectiva, LI puede parecer intuitivamente no aceptable; y lo mismo puede decirse de LNI. Por esta razón algunos lógicos han propuesto sistemas de CEP modal en los que estos teoremas no puedan derivarse. Denominaremos a tales sistemas *sistemas de identidad contingente.* Una sugerencia ha sido introducir una restricción en I2, de tal modo que ahora quedará:

I2′ (IC). $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \supset (\alpha \supset \beta)$, difiriendo α y β únicamente en que en uno o más lugares cuando α tiene a **a** libre, *no apareciendo dentro del ámbito de un operador modal,* β tiene a **b** libre[146].

Siguiendo esta sugerencia podemos formar los sistemas T + IC, S4 + IC, S5 + IC, conteniendo a I1 y I2′ (pero no, por supuesto, a I2 o a LNI).

La sustitución de I2 por I2′ deja a los sistemas invariables por lo que se refiere a las tesis no modales, pero cancela inmediatamente las pruebas que dimos anteriormente de LI y LNI y de hecho mostraremos más adelante que éstos no pueden demostrarse ni siquiera en S5 + IC.

Al construir una semántica para estos sistemas tendremos que atenernos a la regla de que *dentro de cualquier mundo dado* una fbf de la forma $(\mathbf{a} = \mathbf{b})$ ha de considerarse verdadera SI se les asigna a **a** y **b** el mismo valor, ya que la validez de las tesis no modales que contengan el signo de identidad, depende de esto. Pero podemos evitar el tener a LI como válido –esto es, podemos admitir la posibilidad de tener $V((x = y), mu_i) = 1$ pero $V((x = y), mu_j) = 0$, siempre que $mu_i R mu_j$– requiriendo que V haga no una asignación absoluta a una variable **a**, sino una asignación a **a** *dentro de un mundo* mu_i[147]; porque entonces podemos tener un solo

---

distinguibles (denominada *clase de equivalencia* de estos elementos); pero cuando, como en nuestro caso, los elementos son denumerables podemos más convenientemente considerar que el primero de la ordenación habitual representa a todos ellos.

145 Obsérvese que si $V(x_k) = x_k$ tenemos, a partir de II, que $(x_k = x_k) \in \Gamma_i$.

146 *Vide* Kanger [1957b], Hintikka [1961], [1963], Cohen [1960].

147 La semántica de Kanger [1957b], págs. 2–3 presupone esto en efecto.

objeto asignado a x e y en mu_i, y por tanto V $((x = y), mu_i) = 1$, pero objetos distintos asignados a x e y en mu_j, y por tanto V $((x = y), mu_j) = 0$. Por consiguiente sustituimos la condición que ha de ser satisfecha por una asignación de valor a variables individuales en la definición de un modelo-CEP de la pág. 129 por lo siguiente:

Para cualquier variable individual, **a**, y para cualquier $mu_i \in$ MU, V (**a**, mu_i) es algún miembro de D.

Esto requerirá un consiguiente refrasear la regla de las fórmulas atómicas, que ahora quedará así:

Para cualquier variable predicativa n-ádica, ϕ, y para cualquier $mu_i \in$ MU, V $(\phi(x_1,...,x_n), mu_i) = 1$ ó 0 según que $<$V $(x_1, mu_i), ..., $V $(x_n, mu_i), mu_i> \in$ V (ϕ) o no.

Para la identidad sustituimos la regla [V =] por:

[V ='']. Para variables individuales cualesquiera, **a** y **b**, y para cualquier $mu_i \in$ MU, V $((\mathbf{a} = \mathbf{b}), mu_i) = 1$ ó 0 según que V (**a**, mu_i) = V (**b**, mu_i) o no.

Este cambio en el hacer asignaciones a variables individuales causa, sin embargo, una dificultad al interpretar [V ∀] (pág. 129). [V ∀] establece que V $((\mathbf{a})\ \alpha, mu_i) = 1$ SI para cada V′ que difiera de V *solamente en la asignación a* **a**, V′ $(\alpha, mu_i) = 1$.

La forma más evidente de interpretar esta regla sería:

[V ∀′]. Para cualquier fbf, α, cualquier variable individual, **a**, y cualquier $mu_i \in$ MU, V $((\mathbf{a})\ \alpha, mu_i) = 1$ SI para cada V′ que difiera de V *solamente en la asignación a* **a** en cualquier mundo o mundos, V′ $(\alpha, mu_i) = 1$[148].

Sin embargo, es fácil demostrar que la semántica así obtenida haría a

$$(1)\ L(\exists x)\phi x \supset (\exists x) L \phi x$$

válida. Porque, supóngase que en algún $mu_i \in$MU en un modelo-CI, V $(L\ (\exists x)\ \phi x, mu_i) = 1$. Entonces V $((\exists x)\ \phi x, mu_j) = 1$ para todo mu_j tal que $mu_i R mu_j$. Por tanto para cada mu_j tal existe alguna asignación, digamos V'_j que difiere de V **sólo** en la asignación a x, y tal que $V'_j(\phi x, mu_j) = 1$ (es decir, $<V'_j(x, mu_j), mu_j \in$V (ϕ)). Esto significa que podemos definir una asignación, V′, a través de todo el modelo, simplemente haciendo que V′ (x, mu_j) sea aquel miembro de D que V'_j asigna a x en mu_j en cada caso, y en caso contrario haciendo que V′ sea lo mismo que V. Evidentemente V′ $(\phi x, mu_j) = 1$ para todo mu_j tal que $mu_i R mu_j$, y por tanto V′ $(L\phi x, mu_i) = 1$. Pero V′ difiere de V sólo en la asignación a x, y por consiguiente V $((\exists x) L\ \phi x, mu_i) = 1$. De este modo para cualquier $mu_i \in$ MU en cualquier modelo-CI tendríamos V $(L\ (\exists x)\ \phi x \supset (\exists x) L\ \phi x, mu_i) = 1$, y por tanto la fórmula sería válida.

Ahora bien esta fórmula (1) es una con la que nos hemos encontrado anteriormente (pág. 127) y señalamos entonces que no es intuitivamente plausible. Adaptando un ejemplo dado por Quine[149], en ciertos juegos es necesario que *algún* jugador gane, pero no hay ningún jugador individual que haya de ganar. Hay, sin embargo, un modo en el que *podríamos* hacer que (1) pareciese plausible, y es pensando en una expresión tal como "el ganador" en el sentido de que designe un

---

148 Cf. Kanger, loc. cit. Una alternativa sería hacer que V$((\mathbf{a})\ \alpha, mu_i)$ fuese 1 SI para cada V′ que difiera de V sólo en la asignación a **a** en mu_i, V′$(\alpha, mu_i) = 1$; (de este modo al formar cualquier V′ tendríamos que dejar a V′(**a**) igual que V(**a**) en todo mundo que no sea mu_i). Esto nos proporcionaría una semántica para el cuantificador (Ux) de Kanger [1957c]. Como el propio Kanger observa allí, sin embargo, tal semántica dejaría de hacer válido $(x)L\ \phi x \supset L\ \phi y$.

149 Quine [1953], pág. 148, donde el ejemplo se usa sin embargo para ilustrar un punto un tanto diferente.

solo "objeto", tal que, en un sentido más frecuente de "objeto", puede ser un objeto en determinada situación y otro distinto en otra. Ya que en ese caso, si es necesario que alguien gane entonces *existe* alguien, a saber el *ganador* que ha de ganar. Ahora bien, nosotros realmente hacemos uso a menudo de frases de la forma "el tal y cual" ("The so–and–so") de este mismo modo. Considérese, por ejemplo, la expresión "la carta de encima de la baraja" tal como ocurre en las reglas de un juego de cartas. Las reglas pueden, sin ambigüedad, especificar que al llegar a cierto momento del juego la carta de encima haya de ser entregada a determinado jugador; sin embargo en una ocasión la carta de encima puede ser el As de Espadas y en otra la Reina de Corazones. De este modo la frase "la carta de encima de la baraja" no designa ninguna carta particular (trozo individual de cartón) excepto en el contexto de un estado particular de la baraja; sin embargo podemos, en un sentido, considerarla como representando un solo objeto, en contraste con *la carta de debajo de la baraja* y demás.

Tales "objetos" se denominan a menudo *objetos intensionales*[150] y al parecer las reglas que hemos estado considerando proporcionan una semántica para una lógica en la cual (a diferencia de los otros sistemas que hemos considerado) las variables individuales tienen como alcance (range) objetos intensionales. Sin embargo no intentaremos construir tal lógica aquí, aunque, tal como la discusión anterior ha indicado

$$(1)\quad L\,(\exists x)\phi x \supset (\exists x) L\,\phi x$$

sería válida en ella. (Cuando ϕx significa "x está encima de la baraja" y x tiene como alcance objetos intensionales, entonces (1) será verdadera ya que si debe de de haber una carta encima de la baraja, entonces, aunque ningún trozo individual de cartón ha de estar necesariamente encima de la baraja, sin embargo *existe* algo, a saber *la carta de encima* que necesariamente ha de estar encima de la baraja. Esto es semejante a lo que dijimos acerca del juego en el que debe haber alguien que gane).

Sin embargo (1) no es de hecho un teorema de ninguno de los sistemas contingentes de identidad, ya que éstos se obtienen por debilitación (weakening) de los sistemas LNI y (1) no es teorema de ninguno de *ellos*. Y esto nos muestra que lo que parecía ser la semántica más natural para los sistemas CI resulta que no los caracteriza después de todo.

El fallo parece consistir en que la semántica nos permite descifrar un "objeto" en una serie de miembros cualesquiera de D. Es decir, supóngase que existan dos mundos, mu_1 y mu_2, entonces si u_1 y u_2 son miembros de D parecería que pudiésemos imaginar el "objeto" que sea u_1 en mu_1 y u_2 en mu_2 (En resumidas cuentas, lo que (1) dice es que cualquier serie de miembros de D cada uno de los cuales sea ϕ en algún mundo accesible a mu_i nos autoriza a suponer la existencia de un "objeto" que sea ϕ en todos ellos).

Cuando consideramos el asunto de este modo podríamos pensar que los sistemas LNI requieren que las únicas series de miembros de D que valgan como objetos sean las series que consten del mismo miembro de D en cada mundo (es decir que los únicos objetos reconocidos en estos sistemas sean los propios miembros directos de D). Parece, por tanto, que una semántica adecuada para los sistemas CI no tendría que requerir ni que únicamente las series que consten solamente de un solo miem-

---

150 Los objetos intensionales serían lo mismo que los *conceptos individuales* de Carnap [1947], pág. 47 y Frege [1892]. Para una formalización de la lógica intensional de Frege *vide* Church [1951].

bro de D deban ser consideradas como objetos, ni que ninguna serie, cualquiera que sea, de miembros de D deba considerarse como objeto.

Un modo de lograr tal semántica consiste en hacer que el conjunto de series que han de ser consideradas como objetos sea determinado por cada modelo; es decir, hacer que el modelo especifique qué asignaciones a variables individuales han de ser permisibles. Formalmente podríamos realizar esto haciendo que el modelo incluyese un conjunto, Θ, de asignaciones de valor, tomando una de ellas, V_1, como la asignación designada y haciendo que una fbf, α, sea válida SI $V_1(\alpha, mu_i) = 1$ para todo $mu_i \in$ MU en todo modelo tal.

Un modelo-T + IC (S4 + IC, S5 + IC) puede definirse entonces como un quíntuple ordenado $<$MU, R, D, V_1, $\Theta>$ en el que MU, R y D son lo mismo que antes, $V_1 \in \Theta$ y Θ es el conjunto de asignaciones de valor tal que para todo $V \in \Theta$ y para cualesquiera variables individuales **a** y **b** existe alguna $V \in \Theta$ que sea lo mismo que V excepto en que $V(\mathbf{a}, mu_i) = V'(\mathbf{b}, mu_i)$ para todo $mu_i \in$ MU.

[V $\sim$], [V $\vee$] y [V L] serán como antes (pero generalizadas para todo $V \in \Theta$), pero [V $\forall$] será sustituida por:

[V $\forall''$]. Para cualquier fbf, α, y para cualquier variable individual, **a**, y cualquier $mu_i \in$ MU, V ((**a**) α, mu_i) = 1 SI para toda $V' \in \Theta$ que difiera de V solamente en la asignación a **a**, $V'(\alpha, mu_i) = 1$.

Los modelos para los sistemas LNI se vuelven ahora equivalentes a aquel subconjunto de modelos-CI en el que Θ contiene precisamente aquellas asignaciones que dan a cualquier variable individual el mismo valor en todos los mundos del modelo (y siendo V_1 la V de los modelos-LNI). De esto se sigue que la fórmula (1), puesto que no es válida en ninguno de los sistemas LNI, no es válida mediante esta semántica tampoco.

El CP, los axiomas modales y cuantificacionales de T + IC, S4 + IC y S5 + IC son todos válidos de acuerdo con la semántica que hemos descrito ahora. I1 es igualmente válido, ya que toda $V \in \Theta$ asigna un valor único a cualquier variable individual en un mundo dado, y por tanto V ((**a** = **a**), mu_i) = 1 para todo $mu_i \in$ MU. Y I2′ es válido, ya que cualquier parte modal de α se repetirá exactamente igual en β, y, dados los valores (en mu_i) de estas sub-fórmulas modales, los valores de α y β en mu_i dependerán únicamente de las asignaciones de valores hechas en el propio mu_i a las variables; pero α difiere de β sólo en que éste tiene a **b** libre, mientras que α tiene libre a **a**, y por hipótesis **a** y **b** tienen el mismo valor en mu_i.

El esquema del axioma I2 no restringido, sin embargo, ya no sigue siendo válido. Ya que mientras que

$$(2)\quad (x = y) \supset (\phi x \supset \phi y)$$

(un simple ejemplo de I2′) es válido

$$(3)\quad (x = y) \supset (L\,\phi x \supset L\,\phi y)$$

que es una muestra de I2, pero no de I2′, resulta falso en el siguiente modelo: MU = $\{mu_1, mu_2\}$; D = $\{u_1, u_2\}$; V $(x, mu_1) = u_1$, V $(y, mu_1) = u_1$, V $(x, mu_2) = u_1$, V $(y, mu_2) = u_2$; V $(\phi) = \{<u_1, mu_1>, <u_1, mu_2>\}$. Aquí a x e y se les asigna el mismo valor (u_1) en mu_1, de forma que tenemos V $((x = y), mu_1) = 1$; pero a partir de las asignaciones a x, y y ϕ tenemos V $(\phi x, mu_1) = 1$, V $(\phi x, mu_2) = 1$ y V $(\phi y, mu_2) = 0$, y por tanto V $(L\,\phi x, mu_1) = 1$; pero V $(L\,\phi y, mu_1) = 0$, de forma que V ((3), mu_1) = 0[151]. El mismo modelo –de hecho cualquier modelo

[151] El hecho de que (2) sea un teorema de los sistemas contingentes de identidad pero (3) no lo sea destaca con fuerza otra compleja característica de estos sistemas, a saber, que la regla

en el que x e y tengan asignado el mismo valor en mu_1 pero distintos valores en mu_2 – hará falso a LI, ya que en tal modelo tendremos V $((x=y), mu_1)=1$ pero V$((x=y), mu_2)=0$ y por consiguiente V$(L(x=y), mu_1)=0$. Y LNI resulta falso de modo semejante si x e y tienen el mismo valor en mu_2 pero distintos valores en mu_1. Estos resultados para fórmulas con identidad son los mismos ya estemos tratando con T + IC, S4 + IC, o S5 + IC.

Semántica para T + I y S4 + I

Con hacer un simple cambio en la semántica que acabamos de considerar para los sistemas IC podemos definir la validez para los sistemas que mecionamos al principio de este capítulo y luego dejamos a un lado, a saber T + I y S4 + I, en los que son tesis I1 y I2 pero no LNI. (LNI es desde luego derivable como teorema en S5 + I). El cambio en cuestión es una restricción de la regla para las asignaciones de valor a las variables individuales. Seguimos permitiendo a $V \in \Theta$ que asigne diferentes valores a una variable individual en diferentes mundos, pero ahora insistimos en que siempre que dos variables individuales tengan el mismo valor en un mundo dado, pongamos por caso, mu_i, deben tener también el mismo valor (aunque no necesariamente *aquél*) en todo mundo accesible a mu_i. La regla por consiguiente quedará así:

Para cualquier variable individual, **a**, cualquier $V \in \Theta$ y para cualquier $mu_i \in$ MU, V(**a**, mu_i) es algún miembro de D; con tal que (para cualquier variable individual, **b**) si V(**a**, mu_i)=V(**b**, mu_i) entonces para cualquier $mu_j \in$ MU tal que $mu_i R mu_j$, V(**a**, mu_j) = V(**b**, mu_j).

---

de la sustitución uniforme para variables predicativas no es válida en ellos ya que si lo fuera podríamos sustituir ϕ por $L\phi$ en (2) y así obtener (3) como teorema. Así pues parece que la aceptación de estos sistemas tal como aparecen implica rechazar el tratar una expresión de la forma $L\phi$ como designadora de una propiedad genuina. Esto no sería alarmante si no existiese modo inteligible de construir $L\phi$ como propiedad; pero la semántica que hemos estado utilizando para los sistemas IC de hecho nos proporciona un modo perfectamente claro de definir $L\phi$ como propiedad mediante la misma técnica que hemos utilizado para la propia ϕ, a saber, correlacionándola en un modelo con un conjunto de pares ordenados. Ya que podemos decir que V($L\phi$) es el conjunto de pares $<u_k, mu_i>$ tal que para todo mu_j tal que $mu_i R mu_j$, $<u_k, mu_j> \epsilon$ V(ϕ); en otras palabras un miembro de D está en V($L\phi$) para un mundo dado SI está en V(ϕ) para todo mundo accesible a ese mundo. $L\phi x$ será entonces verdadero en mu_i SI el valor asignado a x en mu_i es ϕ en todo mu_j accesible a mu_i (sin importar que el valor asignado a x en mu_j sea ϕ en mu_j o no). Todo esto define evidentemente a $L\phi$ como propiedad en el sentido relevante, y nos da además un modo muy natural de construir "x es necesariamente ϕ"; así pues, la no sustitutibilidad de $L\phi$ por ϕ en (2) implica una severa restricción en el alcance (range) de las propiedades que pueden ser valores de las variables predicativas en los sistemas IC.

De hecho parece ser que la asignación de valores a variables individuales mundo por mundo en vez de globalmente, lo cual es una característica esencial de la semántica de los sistemas IC, deja dos caminos abiertos para la evaluación de fórmulas que contengan $L\phi$. Podemos ilustrarlos mediante $L\phi y$ en el modelo citado en el texto. De acuerdo con las reglas de los sistemas IC, como señalábamos, V($L\phi y$, mu_i) = 0, puesto que aunque el objeto asignado a y en mu_1 (a saber, u_1) es ϕ en mu_1, el objeto asignado a y en mu_2 (a saber u_2) no es ϕ en mu_2. Pero de acuerdo con la regla revisada que acabamos de dar tendríamos V($L\phi y$, mu_1) = 1, puesto que el objeto asignado a y en mu_1 (u_1) es ϕ en mu_2 así como en mu_1. Esta diferencia en los modos de interpretar $L\phi x$, parece ser análoga a, si no lo mismo que, la distinción entre modalidades de *dicto* y *de re* en el sentido que nos referimos en la nota número 131 de las págs. 156-157. Siguiendo la sugerencia que hacíamos allí, podríamos expresar $L\phi x$, cuando se construya del primer modo, como $L(\phi x)$, y cuando se construya del segundo, como $(L\phi)x$. Nos encontraríamos entonces con que

$$(4)\quad (x=y) \supset ((L\phi)x \supset (L\phi)y)$$

es válida, aunque

$$(5)\quad (x=y) \supset (L(\phi x) \supset L(\phi y))$$

no lo es. Los sistemas IC, de hecho, al hacer a (3) no válida parecen estar insistiendo en que la interpretemos en el sentido de (5) más que en el de (4). Este es otro modo de mostrar el hecho de que no nos permiten tratar $L\phi$ como una propiedad genuina, aunque lo que hemos dicho sugiere que mediante modificaciones apropiadas podría hacerse que nos lo permitieran.

Si se fuese a sostener que no tiene sentido nunca el identificar un objeto de un mundo con un objeto de otro (*vide* nota número 122) se desearía tener con toda seguridad un sistema IC en el cual ningún par de dominios se entrecruzan (overlapped).

Todo lo demás ha de quedar como en la definición de modelos y validez que acabamos de dar para los sistemas IC

Es evidente que los modelos T + I (S4 + I) de la presente definición son un subconjunto de los modelos T + IC (S4 + IC), y que por consiguiente todo lo que es válido en los sistemas de identidad contingente sigue siendo válido aquí. Pero ahora LI se vuelve válido también, incluso en T + I: ya que dado que V ((**a** = **b**), mu_i) = 1, **a** y **b** tienen el mismo valor no sólo en mu_i sino también en todo mundo accesible a él, y por tanto V (L (**a** = **b**), mu_i) = 1. De modo semejante I2 es válido ahora sin restricción: ya que los valores de α y β en mu_i dependen únicamente de las asignaciones de valor a las variables de mu_i, y de los mundos accesibles$_*$ a él; y por consiguiente, puesto que α y β difieren únicamente en que β tiene libre a **b** cuando α tiene libre a **a**, siempre que tengamos V ((**a** = **b**), mu_i) = 1 y V (α, mu_i) = 1 también tenemos V (β, mu_i) = 1.

Cuando, sin embargo, **a** y **b** tienen distintos valores en mu_i, no se prescribe nada acerca de si tienen o no tienen el mismo o distintos valores en mu_j. Así pues, podemos tener V ((**a** ≠ **b**), mu_i) = 1 pero V ((**a** ≠ **b**), mu_j) = 0 y por tanto V (L (**a** ≠ **b**), mu_i) = 0; por consiguiente LNI no es válido en T + I (y lo mismo ocurre en S4 + I). Por otra parte, cuando añadimos a S5 la condición de que siempre que mu_iRmu_j, mu_jRmu_i, el resultado es que a las variables que se les asigne el mismo valor en cualquiera de los mundos debe asignárseles el mismo valor en el otro, y por consiguiente a las variables que se les asigne valores distintos en cualquiera de los mundos debe asignárseles distintos valores en el otro. Así pues, en S5 + I, si tenemos V ((**a** ≠ **b**), mu_i) = 1 también tenemos V ((**a** ≠ **b**), mu_j = 1 siempre que mu_iRmu_j, y por tanto V (L (**a** ≠ **b**), mu_i = 1; y por consiguiente LNI es válido.

Descripciones

Veíamos antes que algo un tanto sorprendente ocurría con las proposiciones expresadas mediante sentencias españolas tales como:

(1) El hombre que vive en la casa de al lado es el alcalde

o (2) La estrella matutina es la estrella vespertina.

Las expresiones tales como "la estrella matutina" o "el hombre que vive en la casa de al lado" se denominan frecuentemente *descripciones concretas* (definite descriptions); su uso típico tiene lugar cuando existe alguna propiedad que pertenece a uno y sólo un objeto, ya que entonces frecuentemente deseamos hablar acerca de ese objeto como *la cosa que posee esa propiedad*. Si ϕ es tal propiedad, deseamos poder hablar del *objeto que sea* ϕ (o, más abreviadamente, del ϕ) y formar expresiones tales como "x es el ϕ", "solamente el ϕ es ψ", "el ϕ es el ψ" y así sucesivamente. A fin de poder representar tales proposiciones utilizaremos la expresión (ιx) ϕx para significar "el x tal que ϕx" (es decir 'el (objeto que es) ϕ')[152]. Denominamos a (ιx) un *operador de descripción*. La forma general de la cual (ιx) ϕx es una muestra es (ι **a**) α, en la que **a** es cualquier variable individual y α es cualquier fbf. (Los casos interesantes serán, por supuesto, aquéllos en los que α contenga alguna aparición libre de **a**, pero es más sencillo dejar que α sea cualquier fbf). Un operador de descripción es análogo a un cuantificador en que cada aparición

152 El símbolo ι se introduce con esta utilización en Whitehead and Russel [1910], pág. 30, aunque no se considera como símbolo primitivo (*vide infra*, págs. 173-175).

libre de **a** equivale a ligada en $(\iota\,\mathbf{a})\,\alpha$[153], aunque lo que se forma a partir de α no es una nueva fbf (expresión proposicional) sino un cierto tipo de expresión de designación individual, denominada *término*. Ahora bien, precisamos que las expresiones de la forma $(\iota\,\mathbf{a})\,\alpha$ (términos) funcionen en los sistemas formales como lo hacen otros símbolos individuales, así pues ampliamos las reglas de formación para permitir que los términos sustituyan a las variables individuales como argumentos de los predicados. De este modo tendremos fbfs tales como $\psi(\iota x)\,\phi x$ ("el ϕ es ψ"), $x = (\iota y)\,\phi y$ ("x es el ϕ") y $(\iota x)\,\phi x = (\iota y)\,\psi y$ ("el ϕ es el ψ").

También ampliamos $\forall 1$ de modo que proporcione $((\mathbf{a})\,\alpha \supset \beta)$ siempre que β difiera de α sólo en tener cualquier término en lugar de una aparición libre de **a** en α (con tal que ninguna variable libre del término esté ligada en β). De este modo, una muestra simple de $\forall 1$ sería: $(x)\,\phi x \supset \phi(\iota x)\,\psi x$ —"si todo es ϕ, el ψ es ϕ".

Finalmente añadimos un nuevo esquema de axioma. A fin de establecer esto sucintamente introducimos la notación $(\exists^1 x)\,\phi x$ para significar "exactamente un objeto es ϕ" —o más generalmente $(\exists^1\,\mathbf{a})\,\alpha$ para significar "existe exactamente un valor de **a** que hace a α verdadera". Podemos definir $(\exists^1\,\mathbf{a})$ como sigue:

$$(\exists^1\,\mathbf{a})\,\alpha =_{\mathrm{Df}} (\exists\,\mathbf{b})\,(\mathbf{a})\,(\alpha \equiv (\mathbf{a} = \mathbf{b}))^{154}$$

siendo **b** cualquier variable individual que no aparezca libre en α. (El sentido del definiens es: "existe un objeto **b**, tal que α es verdadera cuando **a** es **b** pero no en caso contrario). Establecemos ahora el nuevo esquema de axioma:

D1 $(\exists^1\,\mathbf{a})\,\alpha \supset \beta$, difiriendo β de α sólo en tener $(\iota\,\mathbf{a})\,\alpha$ siempre que α tiene **a** libre[155].

El sentido de D1 puede verse considerando una simple muestra, a saber, $(\exists^1 x)\,\phi x \supset \phi(\iota x)\,\phi x$, que puede considerarse como "si existiese exactamente un objeto que sea ϕ, entonces éste es el ϕ que es ϕ".

Estas adiciones resultan ser muy convenientes en CEP no modal; nos proporcionan ellas una notación apropiada para las descripciones concretas y para los teoremas que contengan operadores de descripción. Al mismo tiempo puede demostrarse que ellas no nos proporcionan ningún teorema nuevo que *no* contenga operadores de descripción[156]. Lo que nos interesa de momento, sin embargo, es las consecuencias de hacer las mismas adiciones a los sistemas modales, y aquí tropezamos con una dificultad. Considérese la siguiente derivación:

D1: (1) $(\exists^1 x)\,\phi x \supset \phi(\iota x)\,\phi x$

(1) x RD1: (2) $L\,(\exists^1 x)\,\phi x \supset L\,\phi(\iota x)\,\phi x$

---

153 De este modo, al igual que $(x)\phi x$ y $(y)\phi y$ significan ambas simplemente que todo es ϕ, del mismo modo $(\iota x)\phi x$ y $(\iota y)\phi y$ significan ambas simplemente "el ϕ", y por tanto pueden también ser consideradas como variantes alfabéticas ligadas una con respecto a la otra.

154 Cf. Whitehead and Russell [1910], pág. 30 (Russell utiliza E! $(\iota x)(\phi x)$ en lugar de $(\exists 1 x)\phi x$). Para definiciones alternativas *vide* Mendelson [1964], pág. 79 y Kleene [1952] pág. 199.

155 Siempre que ninguna variable libre del término esté ligada en β. Cf. Rosser [1955], pág. 185. Puesto que sólo nos interesan los problemas típicamente modales acerca de las descripciones y estamos presuponiendo la fórmula Barcan no intentamos discutir cuestiones relacionadas con descripciones que no refieran. Formalmente haremos que $(\iota x)\,\phi x$ sea el ϕ si existe exactamente una cosa que es ϕ (es decir si se satisface el antecedente de D1); de lo contrario haremos que $(\iota x)\phi x$ sea cualquier miembro arbitrario del dominio de los individuos.

156 Por supuesto puede demostrarse un resultado más fuerte (stronger), ya que puede mostrarse que existe un método efectivo para transformar cualquier fbf, α, que contenga un operador de descripción en una fbf, α', que no lo contenga y que sea tal que α es una tesis del sistema ampliado SI α', es una tesis del sistema sin D1 o la ampliación a $\forall 1$. En este sentido podemos decir que D1 es no dependiente en CEP no modal. *Vide* Mendelson [1964] págs. 83-85, y Kleene [1952], págs. 405-413; y cf. *infra* págs. 173-175.

$\forall 1$:	(3)	$(x) \sim L\,\phi x \supset L\,\phi(\imath x)\,\phi x$
(3) x Transp. x Def:	(4)	$L\,\phi(\imath x)\,\phi x \supset (\exists x)\,L\,\phi x$
(2), (4) x Sil:	(5)	$L\,(\exists^1 x)\,\phi x \supset (\exists x)\,L\,\phi x$

Esta última fórmula, (5), es solamente una versión ligeramente más debil de la fórmula (1) de la pág.166 (a saber $L\,(\exists x)\,\phi x \supset (\exists x)\,L\,\phi x$), e intuitivamente parecería que o bien ambas valen o bien ambas no valen a la vez; en particular parecería que ambas *fracasan* (fall) en sistemas que no permiten objetos intensionales.

Ahora bien, para investigar si las fórmulas que contienen operadores de descripción, tales como las que son derivables mediante D1 o esquemas relacionados con él, son válidas en los sistemas modales necesitamos una regla para evaluar $(\imath x)\,\phi x$ en un modelo semántico. En CEP no modal es fácil decir: si existiese exactamente un miembro de D que sea ϕ, sea V $((\imath x)\,\phi x)$ ese miembro de D; y si no existe tal miembro de D sea V $((\imath x)\,\phi x)$ algún objeto arbitrario. Esta regla, evidentemente, dará a D1 como válido[157]. Y en los sistemas modales que estén preparados para admitir objetos intensionales podríamos, análogamente, hacer que V $((\imath x)\,\phi x, mu_i)$ fuese el miembro de D que es ϕ en mu_i si existe exactamente uno tal y algún miembro arbitario de D si no existe. Pero para los demás sistemas modales no está claro en absoluto cuál sería la regla correspondiente. Porque incluso si en cada mundo (de un modelo dado) existe exactamente un objeto que sea ϕ, éste puede no ser el mismo objeto en todos los mundos; y en tal caso no existirá ningún miembro de D que podamos fijar como claramente el valor que ha de ser asignado a $(\imath x)\phi x$. El tipo de modelo en el que *está* claro lo que debemos hacer es aquél en el que uno y el mismo miembro de D es el único objeto que es ϕ en cada uno de los mundos; es decir, en el cual existe algún $u_k \in$ D tal que para todo $mu_i \in$ MU, u_k es ϕ en mu_i y ningún otro lo es; ya que entonces es evidente que este u_k es "el ϕ" en ese modelo y debe ser asignado a $(\imath x)\,\phi x$. Esto nos sugiere una regla que podríamos adoptar para las asignaciones de valor a los términos, a saber, que si en un modelo dado existe algún $u_k \in$ D que satisfaga la condición que acabamos de establecer, entonces V $((\imath x)\,\phi x) = u_k$; y si no existe ningún u_k tal, entonces, como en el caso no modal, podemos hacer que V $((\imath x)\,\phi x)$ sea algún miembro arbitrario de D. Podemos denominar a esta regla [V$\imath$].

Con esta regla, D1 no será válido ni siquiera en S5 + I. La muestra más simple de D1 es la fórmula (1) en la derivación anterior, a saber;

$$(1)\quad (\exists^1 x)\,\phi x \supset \phi(\imath x)\,\phi x$$

y esto resulta falso en un modelo en el que MU $= \{mu_1, mu_2\}$, D $= \{u_1, u_2\}$ y V $(\phi) = \{\langle u_1, mu_1\rangle, \langle u_2, mu_2\rangle\}$. Ya que en cada mundo de tal modelo $(\exists^1 x)\,\phi x$ será verdadero, mas, sin embargo, cualquiera que sea el miembro de D que elijamos como valor de $(\imath x)\,\phi x$, existirá un mundo en el que $\phi(\imath x)\,\phi x$ sea falso.

Más aún, el mismo modelo hará falso a (5). Ya que, puesto que $(\exists^1 x)\,\phi x$ es verdadero en cada mundo, tenemos V $(L\,(\exists^1 x)\,\phi x, mu_1) = 1$; pero $(\exists x)\,L\,\phi x$

157 A partir de una conclusión de Smullyan [1948] se sigue que si no permitimos que los términos aparezcan dentro del ámbito (scope) de los operadores modales podemos tener D1 en los sistemas modales sin tropezarnos con el problema que hemos estado discutiendo: pero esta restricción es muy drástica –podríamos también, según esto, abandonar por completo los términos en la lógica modal.

será verdadero en mu_1 sólo si existe algún miembro de D que sea ϕ en cada mundo, y puesto que no existe tal miembro de D,

$$V((\exists x) L\, \phi x, mu_1) = 0$$

La condición según la cual [V ι] proporciona una asignación no arbitraria a $(\iota x)\ \phi x$ es, sin embargo, precisamente la condición según la cual *en un modelo S5 + I* (en el que todo mundo es accesible a todos los demás) tenemos $V((\exists^1 x) L\ \phi x, mu_i) = 1$ para todo $mu_1 \in MU$. Así pues, aunque (1) no es válida, la fórmula más débil:

$$(6)\ (\exists^1 x) L\, \phi x \supset \phi(\iota x)\, \phi x$$

y en general

D2 $(\exists^1 a) L\, \alpha \supset \beta$

(en la que α y β están en la misma relación que en D1) serán válidas en S5 + I[158]. Podríamos, pues, añadir D2 como esquema de axioma en lugar de D1 a S5 + I, sin temor a las no deseables consecuencias, tales como (5), a que D1 dio lugar[159].

Podríamos también tomar en consideración el añadir D2 como esquema de axioma a T y S4 cuantificacionales, pero entonces se origina el problema acerca de cuál sería la semántica para los sistemas así obtenidos. Para obtener tal semántica tendríamos ciertamente que modificar [V ι], ya que esta regla haría a (6), y por consiguiente a D2, no válidas en estos sistemas. Ya que supóngase que u_k es el objeto singular que es ϕ en todo mundo accesible a mu_i, pero no en algún mundo inaccesible a mu_i. Entonces tendremos $V((\exists^1 x)\ L\ \phi x, mu_i) = 1$; pero si usamos [V ι], $(\iota x)\ \phi x$ tendrá asignado un miembro arbitrario de D que puede no ser en absoluto ϕ en mu_i y, así pues, podemos tener quizá $V(\phi\ (\iota x)\, \phi x\, mu_i) = 0$. Ahora bien, [V ι] parece ser evidentemente la regla semántica apropiada para los sistemas que contienen LNI, así pues, lo que esto demuestra es que nosotros no podríamos añadir D2 a T + LNI o S4 + LNI si deseamos, como así es evidentemente, tener a todos los teoremas válidos, de acuerdo con la semántica relevante. Podría resultar posible, sin embargo, añadir D2 a T + I y S4 + I, o a T + IC y S4 + IC, ya que en estos sistemas los símbolos individuales pueden tener distintos valores en distintos mundos, y por tanto se precisaría alguna modificación de [V ι] en cualquier caso. Mas, la complejidad general de la semántica de estos sistemas y la particular complejidad del problema a que daría lugar la revisión requerida de [V ι] hacen que no se vean claros los resultados que de este modo se obtendrían.

Introducción de descripciones mediante definición

Un método completamente distinto de introducir términos en los sistemas modales (o por lo que a esto se refiere no modales también) sería el de considerar a las fórmulas que contengan términos como abreviaturas de fórmulas en las que los términos no aparecen en absoluto. Si pudiéramos hacer esto no precisaríamos una regla semántica aparte para los términos, tal como [V ι], sino que podríamos siempre averiguar el valor de tales fórmulas mediante las demás reglas (la eliminabilidad de los términos quedaría entonces automáticamente garantizada). Para llevar a cabo

---

158 En vista de que $(\exists^1 a) L\, \alpha \supset L(\exists^1 a) L\, \alpha$ es tesis en S5 + I podemos fácilmente obtener a partir de D2 (de acuerdo con RD1) la fórmula más fuerte $(\exists^1 a) L\, \alpha \supset L\, \beta$; y más generalmente podemos derivar el propio D1 ($(\exists^1 a)\alpha \supset \beta$) siempre que α esté completamente modalizada.

159 Y aquí D2 es no independiente en S5+ I en el sentido de la nota número 156.

este programa bastaría con dar definiciones de (a) fórmulas atómicas en las que alguna variable individual sea sustituida por un término y (b) fórmulas de identidad en las que un argumento del signo de identidad sea un término.

Nos contentamos con unas cuantas indicaciones de cómo se desarrollaría esto[160]. Nos limitamos a predicados monádicos y dejamos para el lector el desarrollo de los casos más generales. Serían definiciones apropiadas:

$$\text{A.}\quad \psi(\imath x)\,\phi x =_{\text{Df}} (\exists^1 x)\,\phi x \cdot (y)\,(\phi y \supset \psi y)$$

(es decir "El ϕ es ψ" ha de significar "Exactamente un objeto es ϕ y cualquiera que sea ϕ es ψ"); y

$$\text{B.}\quad ((\imath x)\,\phi x = y) =_{\text{Df}} \phi y \cdot (x)\,(\phi x \supset (x = y))$$

(es decir "El ϕ es (idéntico a) y" ha de significar "y es ϕ y ningún otro objeto lo es").

El tratar los términos de este modo, sin embargo, implica el abandonar el proyecto (que subyace a la anterior semántica) de tratarlos como designadores directos de individuos, que pudieran sustituir a las variables individuales sin destruir la validez. Por ejemplo, con las definiciones que acabamos de dar, incluso la muestra más simple de la extensión a $\forall 1$, a saber:

$$(x)\,\psi x \supset \psi(\imath x)\,\phi x$$

resultaría no válida, ya que sería una abreviatura de

$$(x)\,\psi x \supset ((\exists^1 x)\,\phi x \cdot (y)\,(\phi y \supset \psi y))$$

y evidentemente es posible que cualquier objeto sea ψ sin que exista exactamente un objeto —o por supuesto objeto alguno en absoluto— que sea ϕ. Ni tampoco

$$((\imath x)\,\phi x = y) \supset L((\imath x)\,\phi x = y$$

sería válida, ni siquiera de acuerdo con una semántica que hiciese a $(x=y) \supset L(x=y)$ válida. Y parece casi seguro que cualquier alternativa razonable de las definiciones A y B produciría resultados semejantes.

Algo que este método sí hace, en cambio, es el permitirnos descubrir una ambigüedad que se origina cuando los términos aparecen dentro del ámbito (scope) de los operadores modales, y que es de hecho una de las principales fuentes de perplejidad al decidir una regla para la asignación de valor a los términos. ¿Qué es precisamente, por ejemplo, lo que hemos de entender por "necesariamente el ϕ es ψ"?[161]. Usando el operador de descripción, como hicimos en las secciones anteriores, el único modo como podemos expresar esto es $L\ \psi\ (\imath x)\ \phi x$. Si ahora aplicamos la Definición A a esto obtenemos

$$(1)\quad L\ ((\exists^1 x)\,\phi x \cdot (y)\,(\phi y \supset \psi y))$$

que significa: es una verdad necesaria el que exactamente un objeto es ϕ y que sea lo que sea ϕ (a saber el objeto en cuestión) es también ψ. (De esto podemos

---

160 Lo que sigue es esencialmente una adaptación para el caso modal del método establecido con detalle en *14 de Whitehead and Russell [1910], que ha venido a conocerse como la "teoría de las descripciones" de Russell. Para una explicación mas amplia que la nuestra; *vide* Smullyan [1948].

161 El problema no es distinto del que Whitehead and Russell suscitan respecto al análisis de $\sim\psi(\imath x)\phi x$ (op. cit. pág. 69). De hecho la conclusión de *14 de esa obra es que siempre que tengamos $(\exists^1 x)\,\phi x$ (en notación de Russell E! $(\imath x)\,(\phi x)$) y siempre que todos los predicados complejos de los que $(\imath x)\,(\phi x)$ es argumento se construyan utilizando únicamente funciones de verdad, entonces $(\imath x)\,(\phi x)$ puede tratarse como un símbolo individual, pero que de lo contrario no puede tratarse así (*ibid.*, pág. 83).

derivar fácilmente $L\ (\exists\ x)\ \psi x$, pero no $(\exists\ x)\ L\ \psi x)$. (1) es uno de los objetos que podríamos considerar que "necesariamente el ϕ es ψ" significa; otro, que nuestra presente notación al ser más amplia nos permite distinguir del anterior perfectamente, es:

$$(2)\ (\exists^1\ x)\ \phi x\ \cdot\ (y)\ (\phi y \supset L\ \psi y)^{162}$$

es decir, exactamente un objeto es ϕ y es necesariamente ψ (A partir de esto *podemos* derivar $(\exists\ x)\ L\ \psi x$).

Si ahora volvemos a la derivación de la problemática fórmula (5) –a saber $L\ (\exists^1\ x)\ \phi x \supset (\exists x) L \phi x$– de la pág. 172 veremos que ésta procede a demostrar que $L\ (\exists^1\ x)\ \phi x$ implica $L\ \phi(\imath x)\ \phi x$ y que esto a su vez implica $(\exists\ x)\ L\ \phi x$. Pero si con nuestra presente notación construimos $L\ \phi(\imath x)\ \phi x$ al modo de (1), entonces lo tomamos como:

$$(1')\ L\ ((\exists^1\ x)\ \phi x\ \cdot\ (y)\ (\phi y \supset \phi y))$$

mientras que si lo construimos al modo de (2) lo tomamos como:

$$(2')\ (\exists^1\ x)\ \phi x\ \cdot\ (y)\ (\phi y \supset L\ \phi y)$$

Ahora bien $(1')$ está ciertamente implicada por $L\ (\exists^1\ x)\ \phi x$, pero ella no implica $(\exists x)\ L\ \phi x$; y $(2')$ ciertamente implica $(\exists x)\ L\ \phi x$, pero no está implicada por $L\ (\exists^1\ x)\ \phi x$. Así pues, la ambigüedad que hemos estado considerando subyace a la derivación de (5).

$\psi(\imath x)\ \phi x$, después de todo, sólo puede ser modalizada en un lugar, el principio; pero $(\exists^1\ x)\ \phi x\ \cdot\ (y)\ (\phi y \supset \psi y)$ puede ser modalizada en varios modos notablemente distintos, de los cuales hemos mencionado dos (otro es $(\exists^1\ x)\ \phi x\ \cdot\ L\ (y)\ (\phi y \supset \psi y)$, que puede expresar lo que nosotros muy a menudo significamos mediante "necesariamente el ϕ es ψ").

Conjuntos y atributos

Los CEPs que hemos considerado hasta el momento han contenido variables predicativas, pero sólo una constante predicativa, $=$. La diferencia entre variables predicativas y constantes predicativas en los cálculos elementales de predicados (lower predicate calculi) consiste, simplemente, en que para las constantes predicativas habrá axiomas especiales que abarquen todos los axiomas y reglas para las funciones de verdad y la cuantificación. Para $=$, estos axiomas son I1 e I2. Incluso es posible prescindir de las variables predicativas y tener sólo un número (finito o infinito) de constantes predicativas con axiomas que gobiernen su uso. Uno de los cálculos de predicados de este tipo más útiles es (especialmente en matemáticas) la teoría de conjuntos[163]. Formalmente, la teoría de conjuntos es un cálculo elemental de predicados con un símbolo predicativo diádico, la constante $\in$. Interpretamos a $x \in y$ como significando "x es un miembro del conjunto y". Una característica de la teoría de conjuntos es la de que los conjuntos que tienen exactamente los mismos miembros son el mismo conjunto; es decir:

$$(x = y) \equiv (z)\ ((z \in x) \equiv (z \in y))$$

es un teorema. Esto, por supuesto, significa que en algunos de nuestros sistemas

---

162 (2) de hecho es lo que obtendríamos a partir de $L\ \psi(\imath x)\phi x$ de acuerdo con Definición A, si en lugar de considerar a $\psi(\imath x)\phi x$ como argumento de L considerásemos $L\phi$ como predicado y a $(\imath x)\phi x$ como a su argumento. De este modo la ambigüedad que estamos señalando aquí refleja la distinción entre $L(\phi x)$ y $(L\phi)x$ que señalamos en la nota número 151.

163 Una discusión de la teoría de conjuntos cae fuera del ámbito de este libro. Para referencias *vide*, por ejemplo, Fraenkel and Bar Hillel [1958], Quine [1963], Stoll [1961].

CEP modales (aquéllos en los que tenemos $(x = y) \supset L\,(x = y)$) tendríamos

$$(z)\,((z \in x) \equiv (z \in y)) \supset L\,(z)\,((z \in x) \equiv (z \in y))$$

lo cual significa que si dos conjuntos tienen los mismos miembros entonces necesariamente tienen los mismos miembros. Mientras que consideraciones del tipo mencionado en la pág. 162 y s. pueden hacer posible el dar un sentido a tal principio que lo haga válido[164], por otro lado causa dificultades si deseamos hablar del conjunto de todos los objetos que poseen tal y tal propiedad. Ya que cuando $\hat{x}\ \phi x$[165] denota el conjunto de todas las xs para las cuales es válido ϕx, la definimos como $(\imath y)\,(x)\,[\phi x \equiv (x \in y)]$ (es decir, el objeto que tiene como miembros a aquellos y sólo aquellos objetos que son ϕ). Y de hecho el operador de descripción nos proporcionará aquí el mismo problema exactamente que ya hemos examinado (pág. 171 y s.).

Pudiera ser el caso que dos propiedades determinasen el mismo conjunto, sin embargo decimos que ellas siguen siendo dos propiedades distintas, o dos *atributos*. Con relación a "x es un miembro del conjunto y" se podría establecer una relación diádica "x posee el atributo y", simbolizándola mediante $x\ \eta\ y$ e intentar producir un CEP paralelo a la teoría de conjuntos[166]. La ventaja de una teoría tal que incluyese a la teoría de conjuntos en un CEP modal es la siguiente: al igual que dos conjuntos son lo mismo si tienen los mismos miembros, podríamos decir que dos atributos son idénticos sólo *si necesariamente* son válidos para los mismos individuos; tendríamos, de este modo:

$$(x = y) \equiv L\,(z)\,((z\ \eta\ x) \equiv (z\ \eta\ y))$$

como teorema. Podríamos entonces definir el atributo formado a partir del predicado ϕ como $(\imath y)\,L\,(x)\,(\phi x \equiv x\ \eta\ y)$, y resulta que entonces podríamos usar D2 y evitar algunas (aunque al parecer no todas[167]) de las dificultades que se originan en una teoría de conjuntos directamente basada en la lógica modal.

En este capítulo hemos logrado menos conclusiones seguras que de costumbre; pero las cuestiones de la identidad y la descripción figuran entre las más difíciles de la lógica modal y en el presente estado de la materia están todavía llenas de oscuridades y problemas sin resolver.

---

164 En Fitch [1966] y [1967] tenemos una teoría de conjuntos en la que $(x \in y) \supset L(x \in y)$ es un axioma (una teoría, además, que de acuerdo con Fitch no implica la contradicción de Russell y no precisa de las elaboradas precauciones de las teorías de conjuntos no modales).

165 La mayoría de las teorías de conjuntos no tienen variables predicativas y expresarían esto como $\hat{x}\ \alpha$ (es decir, el conjunto de xs que satisfagan α), pero $\hat{x}\ \phi x$ es un poco más fácil de captar intuitivamente (otra notación común en lugar de $\hat{x}\ \alpha$ es $\{x : \alpha\}$).

166 Lemmon [1963] y Barcan Marcus [1963]. Hemos utilizado η en lugar de la α de Lemmon, a la cual podría hacer confusa la notación de este libro. Para detalles formales de estos sistemas recomendamos al lector los artículos citados y Barcan Marcus [1967] y Parsons [1967].

167 Vide Lemmon, op. cit. pág. 96.

PARTE III

EXAMEN DE LA LOGICA MODAL

CAPITULO XII

LOS SISTEMAS LEWIS (I)

Preámbulo histórico

La lógica modal fue discutida por varios autores antiguos, principalmente por Aristóteles[168] y también por los lógicos medievales; la obra de ellos, sin embargo, queda fuera del ámbito de este libro. Luego, al parecer, el tema fue casi abandonado por completo hasta época bastante reciente. De hecho, los primeros pasos hacia la moderna lógica modal parecen haber sido dados por Hugh MacColl hacia finales del siglo diez y nueve[169]. MacColl introduce las operaciones de disyunción ($a + b$), negación (a') e implicación ($a : b$)[170]. Luego afirma como principio válido

$$(a : b) : a' + b^{171}$$

pero niega la validez de

$$(a : b) = a' + b^{172}$$

basándose en que si a significa "El persiste en sus despilfarros" y b significa "El se arruinará", entonces la negación de $a : b$ es "El puede persisitir en sus despilfarros sin que necesariamente se arruine", mientras que la negación de $a' + b$ es "El persistirá en sus despilfarros y no se arruinará". MacColl se opone a la identificación de éstos precisamente porque el primero afirma sólo la posibilidad mientras que el segundo afirma algo más. Lo cual viene a equivaler que él considera a $a : b$ como expresión de implicación estricta (strict implication) y a $a' + b$ como expresión de implicación material (material implication). En trabajos posteriores y en su libro titulado *La Lógica simbólica y sus aplicaciones* (Symbolic Logic and its Applications)[173], esto resulta incluso más evidente, ya que él niega explícitamente el que a su conectiva implicacional pueda dársele una interpretación de función de verdad y define a $(A : B)$ como $(A' + B)^{\epsilon}$ (o alternativamente como $(AB)^{\eta}$) en donde ϵ y η representan la necesidad y la imposibilidad, respectivamente[174] (Aunque habla de varios tipos de "certeza" y "posibilidad", presumiblemente la "certeza lógica" y la "posibilidad lógica" de las que habla en relación con esto sean

---

168 Aristóteles (350 a. de C.) $29^{b}29$-$40^{b}16$. Un intento de formalizar la lógica modal de Aristóteles se encontrará en McCall [1963]. Para una historia general de la lógica modal antigua y medieval *vide* Kneale [1962] págs. 81-96, 117-138, 212, 232, 236, 243 o Bocheński [1961] págs. 81-88, 101-103, 114-115, 224-230.

169 MacColl [1880].

170 Op. cit. pags. 50-52.

171 Op. cit. pág. 53.

172 Op. cit. pág. 55.

173 MacColl [1903] [1906a] [1906b].

174 MacColl [1903], págs. 356-7.

la necesidad lógica y la posibilidad lógica). La obra de MacColl también contiene lo que parece ser que es la primera formulación en la época moderna de las denominadas "paradojas de la implicación"[175] y proporciona un concepto del grado de una fórmula que parece anticipar el de Parry[176].

Pero MacColl no proporciona ningún axioma[177] y su sistema apenas puede ser denominado lógica modal del tipo claramente moderno a que este libro se refiere. Para esto tenemos que esperar hasta un poco después de la publicación en 1910 de *Principia Mathematica*[178], obra que contribuyó más que ninguna otra al establecimiento del método axiomático en la lógica. Comenzando en 1912, C. I. Lewis publicó una serie de artículos y libros[179] en los que expresaba su descontento con la noción de implicación material que aparecía en *Principia*. El fundamento de su descontento era muy semejante al de MacColl, pero tuvo la gran ventaja de poder utilizar un método axiomático basado en el del propio *Principia* y lo utilizó para construir un sistema (o más bien una serie de sistemas)en el que la implicación estricta más que la material desempeñaba el principal papel. Es la obra de Lewis la que marca el comienzo de la lógica modal propiamente moderna y el resto de este capítulo está dedicado a ella.

Las "paradojas de la implicación"

En el sistema de *Principia Mathematica* –por supuesto en cualquier sistema normal de CP– se encuentran las tesis:

$$(1)\ p \supset (q \supset p)$$

$$(2)\ \sim p \supset (p \supset q)$$

El sentido de (1) se expresa a menudo diciendo que si una proposición es verdadera, cualquier otra proposición la implica; el de (2) diciendo que si una proposición es falsa, implica cualquier otra proposición. Juntas a menudo se les denomina las "paradojas de la implicación" (material).

Más aún, puesto que para cualquier proposición p, o bien el antecedente de (1) o el antecedente de (2) deben ser verdaderos, es fácil derivar de (1) y (2) la nueva tesis:

$$(3)\ (p \supset q) \vee (q \supset p)$$

es decir en cualquier par de proposiciones, o bien la primera implica a la segunda o la segunda implica a la primera.

Lewis no deseaba rechazar estas tesis. Por el contrario argüía[180] (y con seguridad correctamente) que (1) y (2), cuando eran interpretadas debidamente, no eran "ni dichos misteriosos, ni grandes descubrimientos, ni enormes absurdos", sino que simplemente reflejaban el sentido funcional de verdad en el que Russell y Whitehead estaban utilizando la palabra "implica" (imply). Pero también mantenía que existe otro sentido, más fuerte, de "implica", un sentido en el que cuando decimos

---

175 MacColl [1906b], pág. 513.

176 MacColl [1903], pág. 356; Parry [1939], pág. 144 (y *supra* nota 4)

177 Sí da ([1906a] pág. 8) una lista de fórmulas "auto-evidentes" y sería interesante saber cuál de los más recientes sistemas modales es el más débil en el que todas ellas son verdaderas.

178 Whitehead and Russell [1910].

179 Lewis [1912], [1913], [1914a], [1914b], [1918]: Lewis and Langford [1932].

180 Lewis [1912] pág. 522.

que p implica q queremos significar que q se sigue de p; y que en este sentido de "implica" no se da el caso de que toda proposición verdadera esté implicada por cualquier otra proposición, o que cualquier proposición falsa implique cualquier otra proposición. Más aún, en este sentido más fuerte de "implica" existen pares de proposiciones que no se implican entre sí. Así pues Lewis tuvo que distinguir entre una implicación que opera materialmente y otra que opera necesariamente o *estrictamente* y hacer distinciones análogas para la disyunción y la equivalencia[181]. En sus primeros artículos a veces consideraba a la disyunción estricta como primitiva[182], a veces a la implicación estricta[183], a veces a la imposibilidad lógica[184]; y en su libro *Examen de la Lógica Simbólica* (A Survey of Symbolic Logic)[185] estableció un sistema axiomático (el sistema *Survey*) en el que nuevamente tomaba a la imposibilidad lógica como el operador modal primitivo (junto con la conjunción y la negación como operadores de función de verdad primitivos). En 1930 Oskar Becker[186] propuso algunos axiomas adicionales para el sistema *Survey* y demostró que permitían que todas las modalidades fuesen reducidas (*vide* pág. 51) a un pequeño número de no equivalentes. Pero el primer tratamiento comprehensivo de los sistemas de implicación estricta (o en realidad de cualquiera de los sistemas de la lógica modal) apareció en 1932 en el libro de Lewis y Langford *Lógica Simbólica* (Symbolic Logic). Aquí a la posibilidad se le considera como el operador modal primitivo y se desarrollan con considerable detalle dos sistemas axiomáticos de implicación estricta (denominados S1 y S2 respectivamente). En un Apéndice se esbozan otros varios sistemas también; uno de éstos es el sistema del *Survey* (S3); otros dos, que contienen algunos de los postulados de reducción de Becker, se denominan S4 y S5[187].

Expondremos estos sistemas tal como aparecen en *Symbolic Logic*, con la excepción de que utilizaremos la notación y la terminología empleada en la I Parte de este libro. En el Apéndice 4, págs. 285-87 se da una relación de la propia notación de Lewis y Langford.

El sistema S1

Símbolos primitivos

$p, q, r, \ldots$ [Variables proposicionales]

$\sim, M.$ [Operadores monádicos]

---

181 Lewis [1912], [1913], [1914a], [1914b]. Por lo que hemos sido capaces de descubrir el término "implicación estricta" aparece por primera vez en Lewis [1912], pág. 526, nota 1.

182 Lewis [1912], [1914a].

183 Lewis [1913].

184 Lewis [1914b].

185 Lewis [1918]. Cap. V (reformado en Lewis [1920]).

186 Becker [1930].

187 Estos nombres ("S1" etc.), por los que se han hecho conocidos generalmente los sistemas, se dan en las págs. 500-501 del Apéndice II (escrito por Lewis) en Lewis and Langford [1932]. No aparecen en el Capítulo IV en el que se desarrollan S1 y S2 (a menos que tomemos en cuenta una breve referencia al "Sistema 1" y al "Sistema 2" en las págs. 177-178). El S4 y el S5 de Lewis son deductivamente equivalentes al S4 y S5 de la I parte de este libro, aunque tienen bases diferentes. En el presente Capítulo "S4" y "S5" se refieren a estos sistemas tal como aparecen axiomatizados en Lewis and Langford. Para un estudio más detallado de los axiomas, teoremas y reglas de los diversos sistemas de Lewis *vide* Feys [1965].

[Operador diádico]

(,) [Paréntesis]

Reglas de formación[188]

1. Una variable proposicional que aparezca sola es una fbf.
2. Si α es una fbf, también lo son $\sim\alpha$ y $M\alpha$.
3. Si α y β son fbfs, también lo es $(\alpha \cdot \beta)$

Definiciones[189]

[Def $\vee$] $(\alpha \vee \beta) =_{Df} \sim(\sim\alpha \cdot \sim\beta)$

[Def $\dashv$] $(\alpha \dashv \beta) =_{Df} \sim M(\alpha \cdot \sim\beta)$

[Def $=$] $(\alpha = \beta) =_{Df} ((\alpha \dashv \beta) \cdot (\beta \dashv \alpha))$

[Def L][190] $L\alpha =_{Df} \sim M \sim\alpha$

Axiomas[191]

AS1.1 $(p \cdot q) \dashv (q \cdot p)$

AS1.2 $(p \cdot q) \dashv p$

AS1.3 $p \dashv (p \cdot p)$

AS1.4 $((p \cdot q) \cdot r) \dashv (p \cdot (q \cdot r))$

AS1.5 $((p \dashv q) \cdot (q \dashv r)) \dashv (p \dashv r)$

AS1.6 $(p \cdot (p \dashv q)) \dashv q$

Reglas de transformación

1. *Sustitución uniforme*, como en los sistemas de la I Parte.
2. *Sustitución de equivalentes estrictos*: Si $\vdash \alpha$, y β difiere de α sólo en tener alguna fbf, δ, en uno o más lugares en los que α tiene una fbf, γ, entonces si $\vdash (\gamma = \delta), \vdash \beta$.
3. *Adjunción*: $\vdash \alpha, \vdash \beta \rightarrow \vdash (\alpha \cdot \beta)$.
4. *Modus Ponens* (*Separación*): $\vdash \alpha, \vdash (\alpha \dashv \beta) \rightarrow \vdash \beta$.

Existe una llamativa diferencia entre la base ahora citada para S1 y cualquiera de las bases discutidas en la I Parte, y es que no está construida como extensión de CP[192]. De hecho ningún axioma de S1 es una fbf de CP en absoluto. Más aún, mientras que la regla de Sustitución Uniforme pertenece a CP, el Modus Ponens de

---

188 Lewis no establece ningunas reglas de formación, pero éstas son evidentemente las que él usa.

189 Escribimos estas definiciones según el estilo adoptado en la I Parte. Lewis las escribe como equivalencias estrictas, utilizando variables proposicionales.

190 Lewis no tiene ningún símbolo para la necesidad sino que escribe siempre $\sim\Diamond\sim$. (Su $\Diamond$ = nuestro M). Pero la abreviatura proporcionada por esta definición es una evidente conveniencia.

191 Nuestra numeración de estos axiomas no es la misma que la de Lewis and Langford. Además omitimos el axioma $p \dashv \sim\sim p$ ya que se demostró que éste era no independiente en McKinsey [1934] y es derivado por nosotros como TS1.8 más adelante. En lugar de AS1.6 podemos tener $\sim Mp \dashv \sim p$, o $p \dashv Mp$.

192 La primera axiomatización de la lógica modal a partir de una base CP y añadiendo axiomas nuevos y reglas nuevas a esta base (como en la I Parte) parece ser la de Gödel [1933].

S1 se establece para la implicación estricta, no para la implicación material como en CP. (A menudo le denominaremos la regla de la *Separación Estricta*, y a la correspondiente regla CP, la regla de la *Separación Material*). Como resultado de ello las pruebas de los teoremas de S1 pueden tener un "estilo" un tanto diferente de las de, por ejemplo T, ya que no tenemos libertad para servirnos de cualquier tesis de CP que nos pueda parecer útil.

No obstante, S1 contiene a CP; es decir toda tesis de CP es un teorema de S1. Es fácil introducir los operadores $\supset$ y $\equiv$ (como hace el propio Lewis[193]) mediante las definiciones:

$$[\text{Def}\supset] \quad (\alpha\supset\beta) =_{\text{Df}} \sim(\alpha \cdot \sim\beta)$$
$$[\text{Def}\equiv] \quad (\alpha\equiv\beta) =_{\text{Df}} ((\alpha\supset\beta) \cdot (\beta\supset\alpha))$$

Entonces evidentemente toda fbf de CP es una fbf de S1. Para demostrar que S1 contiene a CP tenemos que tomar algunas bases completas para CP y (a) derivar sus axiomas como teoremas de S1; (b) establecer aquellas reglas suyas de transformación que no sean reglas primitivas de S1 como reglas derivadas de S1; y (c) derivar equivalencias estrictas correspondientes a definiciones cualesquiera de las bases que no aparezcan en S1 (ya que entonces la regla de transformación 2 permitirá las mismas sustituciones que las definiciones permitirían). Lewis, de hecho, derivas las bases de *Principia Mathematica* para CP de este modo[194]. No obstante, es un tanto más conveniente operar con una versión de CP en la que los operadores primitivos sean $\sim$ y $\cdot$ como en S1 y las definiciones sean las mismas que las de S1. Dados tales operadores primitivos y tales definiciones es sabido que los axiomas y reglas siguientes son suficientes para CP[195]:

A1 $p\supset(p \cdot p)$

A2 $(p \cdot q)\supset p$

A3 $(p\supset q)\supset(\sim(q \cdot r)\supset\sim(r \cdot p))$

Reglas: 1. Sustitución Uniforme; 2. Separación Material.

Puesto que la Sustitución Uniforme es una regla primitiva de S1, podemos demostrar que S1 contiene a CP derivando A1-3 y la regla de la Separación Material en S1. Eso es lo que haremos ahora.

Primero demostraremos algunos teoremas preliminares. En las pruebas que siguen utilizaremos "Eq" y "MP" para las reglas de transformación de S1, 2 y 4, no para las reglas análogas de CP, y "Adj" para la regla de Adjunción.

TS1.1 $(p \cdot q)=(q \cdot p)$

PRUEBA

AS1.1 $[q/p, p/q]$: (1) $(q \cdot p) \dashv (p \cdot q)$

AS1.1,(1)x Adj, x Def=: (2) $(p \cdot q) = (q \cdot p)$ **Q.E.D.**

Una regla fácilmente derivada es Sil en la forma:

$$\vdash(\alpha \dashv \beta), \vdash(\beta \dashv \gamma) \rightarrow \vdash(\alpha \dashv \gamma)$$

Evidentemente si $\vdash(\alpha \dashv \beta)$ y $\vdash(\beta \dashv \gamma)$, Adj proporciona $\vdash((\alpha \dashv \beta) \cdot (\beta \dashv \gamma))$.

---

193 Lewis and Langford [1932] pág. 136.
194 Lewis and Langford [1932] pág. 136 y ss.
195 *Vide* por ejemplo, Rosser [1955], págs. 14-15, 55 *et seq.*

Por tanto, mediante sustitución en AS1.5 y MP tenemos $\vdash (\alpha \dashv \gamma)$.

TS1.2 $p \dashv p$

PRUEBA

AS1.3:	(1)	$p \dashv (p \cdot p)$
AS1.2 $[p/q]$:	(2)	$(p \cdot p) \dashv p$
(1), (2) x Sil:	(3)	$p \dashv p$ **Q.E.D.**

Adjuntando TS1.2 a sí mismo y aplicando Def = obtenemos

TS1.3 $p = p$

TS1.4 $(\sim p \dashv q) = (\sim q \dashv p)$

PRUEBA

TS1.3 $[\sim M(\sim p \cdot \sim q)/p]$:	(1)	$\sim M(\sim p \cdot \sim q) = \sim M(\sim p \cdot \sim q)$
(1), TS1.1 $[\sim p/p, \sim q/q]$ x Eq:	(2)	$\sim M(\sim p \cdot \sim q) = \sim M(\sim q \cdot \sim p)$
(2) x Def $\dashv$:	(3)	$(\sim p \dashv q) = (\sim q \dashv p)$ **Q.E.D.**

Evidentemente si tenemos una tesis de la forma $(\alpha = \beta)$, entonces de acuerdo con Def = tenemos $\vdash ((\alpha \dashv \beta) \cdot (\beta \dashv \alpha))$; de donde, de acuerdo con AS1.2, $\vdash (\alpha \dashv \beta)$. En el futuro utilizaremos las formas implicativas de cualquiera de las tesis equivalentes, cuando así nos convenga.

TS1.5 $(p \cdot (q \cdot r)) = ((p \cdot q) \cdot r)$

PRUEBA

AS1.4 $[r/p, p/r]$:	(1)	$((r \cdot q) \cdot p) \dashv (r \cdot (q \cdot p))$
(1), TS1.1 x Eq:	(2)	$(p \cdot (q \cdot r)) \dashv ((p \cdot q) \cdot r)$
(2), AS1.4 x Adj, x Def =:	(3)	$(p \cdot (q \cdot r) = ((p \cdot q) \cdot r$ **Q.E.D.**

TS1.6 $\sim\sim p \dashv p$

PRUEBA

TS1.4 $[\sim p/q]$:	(1)	$(\sim p \dashv \sim p) \dashv (\sim\sim p \dashv p)$
(1), TS1.2 $[\sim p/p]$ x MP:	(2)	$\sim\sim p \dashv p$ **Q.E.D.**

Señalábamos anteriormente que la inversa de TS1.6, a saber $p \dashv \sim\sim p$, era uno de los axiomas de Lewis para S1, pero que más tarde se descubrió que no era independiente. Hacemos ver ahora cómo demostrar que es un teorema. Como ejercicio preliminar demostramos:

TS1.7 $\sim p = \sim\sim\sim p$

PRUEBA

TS1.6 $[\sim\sim p/p]$:	(1)	$\sim\sim\sim\sim p \dashv \sim\sim p$
(1), TS1.6 x Sil:	(2)	$\sim\sim\sim\sim p \dashv p$

TS1.4 $[\sim\sim\sim p/p, p/q]$:	(3)	$(\sim\sim\sim\sim p \dashv p) \dashv (\sim p \dashv \sim\sim\sim p)$
(2), (3) x MP:	(4)	$\sim p \dashv \sim\sim\sim p$
TS1.6 $[\sim p/p]$:	(5)	$\sim\sim\sim p \dashv \sim p$
(4), (5) x Adj, x Def =:	(6)	$\sim p = \sim\sim\sim p$ **Q.E.D.**

TS1.8 $8\, p \dashv \sim\sim p$

PRUEBA

TS1.2 $[\sim M(p \cdot \sim p)/p]$:	(1)	$\sim M(p \cdot \sim p) \dashv \sim M(p \cdot \sim p)$
(1), TS1.7 x Eq:	(2)	$\sim M(p \cdot \sim p) \dashv \sim M(p \cdot \sim\sim\sim p)$
(2) x Def $\dashv$:	(3)	$(p \dashv p) \dashv (p \dashv \sim\sim p)$
TS1.2, (3) x MP:	(4)	$p \dashv \sim\sim p$ **Q.D.E.**

TS1.6 y TS1.8 proporcionan, mediante Adj y Def =:

TS1.9 $p = \sim\sim p$

A partir de TS1.4 y TS1.9 se derivan fácilmente:

TS1.4a. $(p \dashv \sim q) = (q \dashv \sim p)$
TS1.4b. $(p \dashv q) = (\sim q \dashv \sim p)$

Además partir de Def $\supset$ y TS1.9 podemos derivar fácilmente:

$$\vdash (p \supset \sim q) = \sim (p \cdot q)$$
$$\vdash \sim (p \supset q) = (p \cdot \sim q) \quad \text{etc.}$$

Consideraremos a "Def $\supset$", como una indicacion suficiente de las sustituciones permitidas por cualquiera de éstas.

TS1.10 $((p \cdot q) \dashv r) = ((p \cdot \sim r) \dashv \sim q)$

PRUEBA

TS1.3 $[\sim M((p \cdot q) \cdot \sim r)/p]$:	(1)	$\sim M((p \cdot q) \cdot \sim r)$	$= \sim M((p \cdot q) \cdot \sim r)$
(1), TS1.5 $[\sim r/r]$ x Eq:	(2)		$= \sim M(p \cdot (q \cdot \sim r))$
(2), TS1.1 $[q/p, \sim r/q]$ x Eq:	(3)		$= \sim M(p \cdot (\sim r \cdot q))$
(3), TS1.5 $[\sim r/q, q/r]$ x Eq:	(4)		$= \sim M((p \cdot \sim r) \cdot q)$
(4), TS1.9 x Eq:	(5)		$= \sim M((p \cdot \sim r) \cdot \sim\sim q)$
(5), x Def $\dashv$:	(6)	$((p \cdot q) \dashv r)$	$= ((p \cdot \sim r) \dashv \sim q$ **Q.E.D.**

En la prueba acabada de demostrar la parte izquierda de las líneas (2) – (5) es la misma que la de la línea (1), y ha sido omitida para facilitar su lectura.

El siguiente teorema proporciona un importante nexo de unión entre S1 y CP.

TS1.11 $(p \dashv q) \dashv (p \supset q)$

PRUEBA

TS1.10 $[p \dashv\!\exists\, q/q, q/r]$:	(1)	$((p \cdot (p \dashv\!\exists\, q)) \dashv\!\exists\, q) \dashv\!\exists\, ((p \cdot \sim q) \dashv\!\exists \sim (p \dashv\!\exists\, q))$
(1), AS1.6 x MP:	(2)	$(p \cdot \sim q) \dashv\!\exists \sim (p \dashv\!\exists\, q)$
(2), TS1.4a x Eq:	(3)	$(p \dashv\!\exists\, q) \dashv\!\exists \sim (p \cdot \sim q)$
(3) x Def $\supset$:	(4)	$(p \dashv\!\exists\, q) \dashv\!\exists\, (p \supset q)$ **Q.E.D.**

A partir de TS1.11 tenemos inmediatamente, de acuerdo con AS1.3 y AS1.2, los dos primeros axiomas de CP, a saber:

A1 $p \supset (p \cdot p)$

A2 $(p \cdot q) \supset p$

A continuación derivamos la regla CP del Modus Ponens para implicación material, es decir,

$$\vdash \alpha, \vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash \beta$$

Para hacer esto primero demostramos:

TS1.12 $(p \cdot (p \supset q)) \dashv\!\exists\, q$

PRUEBA

TS1.10 $[\sim q/q, p \cdot \sim q/r]$:	(1)	$((p \cdot \sim q) \dashv\!\exists\, (p \cdot \sim q)) \dashv\!\exists\, ((p \cdot \sim (p \cdot \sim q)) \dashv\!\exists \sim\sim q)$
TS1.2 $[p \cdot \sim q/p]$, (1) x MP:	(2)	$(p \cdot \sim (p \cdot \sim q)) \dashv\!\exists \sim\sim q$
(2), TS1.9 x Eq, x Def $\supset$:	(3)	$(p \cdot (p \supset q)) \dashv\!\exists\, q$ **Q.E.D.**

Si ahora tenemos $\vdash \alpha$ y $\vdash (\alpha \supset \beta)$, entonces mediante Adj, tenemos $\vdash (\alpha \cdot (\alpha \supset \beta))$; de aquí mediante sustitución en TS1.12 y MP obtenemos $\vdash \beta$. Es decir el Modus Ponens para la implicación material es una regla derivada de S1[196].

Tenemos otro axioma CP más que demostrar. Es conveniente comenzar derivando:

TS1.13 $(p \cdot (p \supset q)) \dashv\!\exists \sim (r \cdot \sim (q \cdot r))$

PRUEBA

TS1.12 $[r/p, \sim q/q]$:	(1)	$(r \cdot (r \supset \sim q)) \dashv\!\exists \sim q$
(1), TS1.4a $[r \cdot (r \supset \sim q)/p]$ x Eq:	(2)	$q \dashv\!\exists \sim (r \cdot (r \supset \sim q))$
(2) x Def $\supset$:	(3)	$q \dashv\!\exists \sim (r \cdot \sim (r \cdot q))$
(3), TS1.1 x Eq:	(4)	$q \dashv\!\exists \sim (r \cdot \sim (q \cdot r))$
TS1.12, (4) x Sil:	(5)	$(p \cdot (p \supset q)) \dashv\!\exists \sim (r \cdot \sim (q \cdot r))$ **Q.E.D.**

TS1.14 $(p \supset q) \supset (\sim (q \cdot r) \supset \sim (p \cdot r))$

---

196 Obsérvese que esta regla será demostrable en cualquier sistema formado mediante la adición de nuevos axiomas a S1 (consideraremos posteriormente diversas ampliaciones tales de S1).

PRUEBA

TS1.13, TS1.10 $[p \supset q/q, \sim(r \cdot \sim(q \cdot r))/r]$ x Eq:	(1)	$(p \cdot \sim\sim(r \cdot \sim(q \cdot r))) \dashv \sim(p \supset q)$
(1), TS1.4a, TS1.9 x Eq:	(2)	$(p \supset q) \dashv \sim(p \cdot (r \cdot \sim(q \cdot r)))$
(2), TS1.5 x Eq:	(3)	$\dashv \sim((p \cdot r) \cdot \sim(q \cdot r))$
(3), TS1. 1 x Eq:	(4)	$\dashv \sim(\sim(q \cdot r) \cdot (p \cdot r))$
(4) x Def $\supset$:	(5)	$\dashv (\sim(q \cdot r) \supset \sim(p \cdot r))$
(5), TS1.11 x MP:	(6)	$(p \supset q) \supset (\sim(q \cdot r) \supset \sim(p \cdot r))$

Q.E.D.

Este último teorema es el axioma CP A3. Por tanto S1 contiene el cálculo proposicional.

S1 y T comparados

T era el más débil (weakest) de los sistemas discutidos en la I Parte. Pero S1 es más débil todavía; contiene casi todas las bases de T pero no todas.

Ya hemos visto que S1 contiene la totalidad de CP. Más aún, de acuerdo con TS1.9, tenemos

$$Mp = \sim\sim M \sim\sim p$$

y de aquí, por la definición de L como $\sim M \sim$,

$$Mp = \sim L \sim p$$

Por extensión de esto, la regla a la que llamábamos ILM en la I Parte (pág.42) es válida en S1; es decir las relaciones entre la posibilidad y la necesidad son las mismas que en T. También tenemos en S1 una equivalencia correspondiente a la definición de $\dashv$ en T:

TS1.15 $(p \dashv q) = L\,(p \supset q)$

PRUEBA

TS1.3 $[p \dashv q/p]$ x Def:	(1)	$(p \dashv q) = \sim M\,(p \cdot \sim q)$
(1) x Def $\supset$:	(2)	$(p \dashv q) = \sim M \sim (p \supset q)$
(2) x Def L:	(3)	$(p \dashv q) = L\,(p \supset q)$ **Q.E.D.**

Los axiomas A5 y A6 de T (a saber $Lp \supset p$ y $L\,(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$) están también en S1. Se demuestran a continuación como TS1.18 y TS1.21.

TS1.16 $p = (\sim p \supset p)$

PRUEBA

AS1.2 $[\sim p/p, \sim p/q]$:	(1)	$(\sim p \cdot \sim p) \dashv \sim p$
AS1.3 $[\sim p/p]$, (1) x Adj, x Def=:	(2)	$\sim p = (\sim p \cdot \sim p)$
TS1.9, (2) x Eq:	(3)	$p = \sim(\sim p \cdot \sim p)$
(2) x Def $\supset$:	(4)	$p = (\sim p \supset p)$ **Q.E.D.**

TS1.17 $Lp = (\sim p \dashv p)$

PRUEBA

TS1.3 $[Lp/p]$: (1) $Lp = Lp$

(1), TS1.16 x Eq: (2) $Lp = L(\sim p \supset p)$

(2), TS1.15 x Eq: (3) $Lp = (\sim p \dashv p)$ **Q.E.D.**

TS1.18 $Lp \supset p$ [A5 de T]

PRUEBA

TS1.11 $[\sim p/p, p/q]$: (1) $(\sim p \dashv p) \dashv (\sim p \supset p)$

(1), TS1.17, TS1.16 x Eq: (2) $Lp \dashv p$

(2), TS1.11 x MP: (3) $Lp \supset p$

A veces será de utilidad usar $Lp \dashv p$ derivado en el paso (2) como teorema. Le denominaremos **TS1.18a**.

Los dos siguientes teoremas son pasos hacia la prueba de A6 de T.

TS1.19 $((p \cdot q) \dashv r) = (p \dashv (q \supset r))$

PRUEBA

TS1.10 $[q/p, p/q]$: (1) $((q \cdot p) \dashv r = ((q \cdot \sim r) \dashv \sim p)$

(1), TS1.1 x Eq: (2) $((p \cdot q) \dashv r) = ((q \cdot \sim r) \dashv \sim p)$

(2), TS1.4a x Eq: (3) $= (p \dashv \sim (q \cdot \sim r))$

(3) x Def $\supset$: (4) $= (p \dashv (q \supset r))$ **Q.E.D.**

TS1.20 $((p \dashv q) \cdot (q \dashv r) \cdot (r \dashv s)) \dashv (p \dashv s)$

PRUEBA

AS1.5 $[r/q, s/r]$: (1) $((p \dashv r) \cdot (r \dashv s)) \dashv (p \dashv s)$

(1), TS1.19 $[p \dashv r/p, r \dashv s/q, p \dashv s/r]$ x Eq:

(2) $(p \dashv r) \dashv ((r \dashv s) \supset (p \dashv s)$

AS1.5, (2) x Sil: (3) $((p \dashv q) \cdot (q \dashv r)) \dashv ((r \dashv s) \supset (p \dashv s))$

(3), TS1.19 $[(p \dashv q) \cdot (q \dashv r)/p, r \dashv s/q, p \dashv s/r]$ x Eq:

(4) $((p \dashv q) \cdot (q \dashv r) \cdot (r \dashv s)) \dashv (p \dashv s)$ **Q.E.D.**

TS1.21 $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$ [A6 de T]

PRUEBA

TS1.20 $[\sim q/p, \sim p/q, p/r, q/s]$: (1) $((\sim q \dashv \sim p) \cdot (\sim p \dashv p) \cdot (p \dashv q)) \dashv (\sim q \dashv q)$

(1), TS1.1 x Eq: (2) $((\sim q \dashv \sim p) \cdot (p \dashv q) \cdot (\sim p \dashv p)) \dashv (\sim q \dashv q)$

(2), TS1.4b x Eq; TS1.17 x Eq: (3) $((p \dashv q) \cdot (p \dashv q) \cdot Lp) \dashv Lq$

(3), TS1.19 x Eq: (4) $((p \dashv q) \cdot (p \dashv r)) \dashv (Lp \supset Lq)$

AS1.3 $[p \dashv q/p]$, (4) x Sil: (5) $(p \dashv q) \dashv (Lp \supset Lq)$

(5), TS1.15 x Eq: (6) $L(p \supset q) \prec (Lp \supset Lq)$

(6), TS1.11 x MP: (7) $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$ **Q.E.D.**

Nos referimos a la fórmula derivada en el (5) anterior, a saber, $(p \prec q) \prec (Lp \supset Lq)$ como **TS1.21a**.

El único punto que queda de la base de T es la Regla de la Necesariedad (RT3), a saber, $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L$ (pág. 37). Esta regla no es válida en S1. O más exactamente no es válida de forma no restringida, como lo es en T; lo que realmente tenemos en S1 es una regla más débil del mismo tipo, restringida a los casos en los que α es una tesis de CP, es decir una tesis que no contiene operadores modales. Es decir, tenemos en S1, la regla:

$$\vdash_{CP} \alpha \rightarrow \vdash_{S1} L\alpha$$

Denominaremos a esta regla, N (S1). Ahora demostraremos que es una regla de S1[197].

Las tesis CP de S1 pueden considerarse que son A1-A3, junto con todas sus transformaciones de acuerdo con las reglas de la sustitución uniforme y la separación material. Ahora bien, para cada una de las A1-A3, N (S1) es válido; ya que cada una de ellas es de la forma $\alpha \supset \beta$, y al probar cada una de ellas primero obtuvimos (o tuvimos como axioma) $\alpha \prec \beta$; y, de acuerdo con TS1.15, $\vdash ((\alpha \prec \beta) = L(\alpha \supset \beta))$. Más aún, la propiedad expresada en N (S1) se conserva en las reglas de transformación. Ya que (1) si para una fbf, α, tanto $\vdash \alpha$ como $\vdash L\alpha$, y β se obtiene a partir de α mediante sustitución uniforme, $L\beta$ se obtendrá a partir de $L\alpha$ mediante la misma sustitución; por tanto, tanto $\vdash \beta$ como $\vdash L\beta$. Y (2) si tenemos a la vez $\vdash \alpha$ y $\vdash (\alpha \supset \beta)$ (de modo que obtenemos β por separación), entonces por hipótesis tenemos $\vdash L\alpha$ y $\vdash L(\alpha \supset \beta)$; y en este caso también tenemos $\vdash L\beta$, ya que mediante TS1.21 tenemos

$$\vdash L(\alpha \supset \beta) \supset (L\alpha \supset L\beta)$$

de donde mediante dos separaciones tenemos $\vdash L\beta$.

Algunas aplicaciones particulares de N(S1) son las siguientes: Cuando α y β son fórmulas CP,

(1) $\vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (\alpha \prec \beta)$

(2) $\vdash (\alpha \equiv \beta) \rightarrow \vdash (\alpha = \beta)$

(1) sigue directamente de N (S1) de acuerdo con TS1.15. Para (2) siempre que tengamos $\vdash (\alpha \equiv \beta)$ tenemos, de acuerdo con las transformaciones CP ordinarias, a la vez $\vdash (\alpha \supset \beta)$ y $\vdash (\beta \supset \alpha)$. Por consiguiente, de acuerdo con (1), puesto que α y β son fórmulas CP, $\vdash (\alpha \prec \beta)$ y $\vdash (\beta \prec \alpha)$; de donde, mediante Adj y Def=, $\vdash (\alpha = \beta)$.

A estas alturas podemos fácilmente derivar las denominadas *paradojas de la implicación estricta* (vide pág. 44 y s.) en las siguientes formas:

TS1.22 $Lp \supset (q \prec p)$

PRUEBA

CP: (1) $p \supset (q \supset p)$

[197] Cf. Wajsberg 1933 y Parry 1939, pág. 143.

(1) x N(S1): (2) $L(p \supset (q \supset p))$

(2) x TS1.21: (3) $Lp \supset L(q \supset p)$

(3), TS1.15 x Eq: (4) $Lp \supset (q \dashv p)$ **Q.E.D.**

TS1.23 $\sim Mp \supset (p \dashv q)$

PRUEBA

CP x N(S1): (1) $L(\sim p \supset (p \supset q))$

(1) x TS1.21: (2) $L \sim p \supset L(p \supset q)$

(2) x ILM, TS1.15 x Eq: (3) $\sim Mp \supset (p \dashv q)$ **Q.E.D.**

En S1, sin embargo, no podemos demostrar las "paradojas" en sus formas estrictas, a saber, $Lp \dashv (q \dashv p)$ y $\sim Mp \dashv (p \dashv q)$[197a].

Como hemos indicado, N (S1) no puede generalizarse para ser aplicada a todas las tesis de S1. Si así fuese S1 contendría, por supuesto, a T. Pero mientras que en S1 (al igual que en T) tenemos, por ejemplo:

$$\vdash (p \cdot q) \dashv (q \cdot p)$$

no tenemos (como sí tenemos en T):

$$\vdash L((p \cdot q) \dashv (q \cdot p))$$

ni, por supuesto, su equivalente de acuerdo con TS1.15:

$$\vdash LL((p \cdot q) \supset (q \cdot p))$$

De hecho, es posible demostrar –y así lo haremos posteriormente (pág. 197) – que S1 no contiene ninguna tesis de la forma $LL\,\alpha$[198]. Aquí, sin embargo, demostraremos el metateorema distinto[199], aunque relacionado con lo anterior, de que si cualquier tesis de la forma $LL\,\alpha$ estuviese en S1, podríamos derivar la regla no restringida de la Necesariedad y como resultado S1, ampliado de este modo, contendría a T. (De hecho, con tal que α sea una tesis de T, el sistema sería deductivamente equivalente a T[200] ya que no es difícil mostrar que T contiene a S1).

PRUEBA

Supóngase que $\vdash LL\,\alpha$. Primero de todo mostramos que en ese caso, para cualquier fbf, β, $\vdash L\beta \rightarrow LL\beta$. La prueba de *esto* es como sigue:

Dados: (1) $LL\,\alpha$

(2) $L\,\beta$

(1), TS1.18 x MP: (3) $L\,\alpha$

TS1.22 $[\alpha/p, \beta/q]$: (4) $L\,\alpha \supset (\beta \dashv \alpha)$

197a Halldén 1948a.

198 No podemos, desde luego, tomar una tesis CP, α, y obtener $\vdash LL\,\alpha$ aplicando N (S1) a ella dos veces, ya que aunque α es una fbf de CP, $L\,\alpha$ no lo es.

199 Cf. Yonemitzu 1955.

200 Desde luego si la fórmula α en cuestión no fuese tesis de T entonces la adición a S1 de $LL\,\alpha$ proporcionaría un sistema más fuerte que T (y si α es inconsistente con T entonces la adición de $LL\,\alpha$ a S1 proporcionaría un sistema inconsistente).

(3), (4) x MP:	(5) $\beta \dashv \alpha$	
(2), TS1.22 $[\beta/p, \alpha/q]$x MP:	(6) $\alpha \dashv \beta$	
(6), (5) x Adj, x Def=;	(7) $\alpha = \beta$	**Q.E.D.**
(1), (7) x Eq:	(8) $LL\beta$	

Ahora bien todos los axiomas de S1 son fbfs *estrictas*, es decir son equivalentes a fbfs de la forma $L\beta$. De aquí que la derivabilidad de $\vdash LL\alpha$ deberá asegurar que para todo axioma, γ, de S1, $L\gamma$ es una tesis; es decir la regla de la Necesariedad debe ser válida para los axiomas. Por consiguiente, sólo tenemos que demostrar que la propiedad expresada en la regla se conserva mediante las reglas de transformación de S1. Ya hemos demostrado (en la prueba de N (S1)) que esta propiedad se conserva mediante las reglas de sustitución uniforme y separación material. Pruebas semejantes para las reglas de transformación, 2, 3 y 4 se realizan directamente (pero aquí las omitimos). Por tanto la adición de $\vdash LL\alpha$ debe proporcionar la regla no restringida de la Necesariedad, y de este modo fortalecer a S1 convirtiéndolo en una axiomatización alternativa de T.

Obsérvese que la prueba que acabamos de ofrecer depende de la axiomatización particular que estemos usando. Ya que estamos suponiendo que la adjunción, la separación estricta y la Eq siguen valiendo cuando se añade $LL\alpha$. Es posible tener un sistema deductivamente equivalente a S1 en el cual estas reglas no se consideren como primitivas y en el cual no se dé siempre el caso de que sigan valiendo cuando se añadan nuevos axiomas. Nuestra prueba, sin embargo, muestra que en cualquier extensión *estricta* del S1 de Lewis (es decir en cualquier sistema formado a partir de él mediante la adición de fbfs estrictas como axiomas) si $\vdash LL\alpha$ entonces N es válida sin restricciones.

Hay otros modos diversos de convertir a S1 en T. Cualquiera de los siguientes podría servir:

(a) Añádase a S1 la regla: $\vdash (\alpha \equiv \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha \equiv L\beta)$[201].

(b) Añádase a S1 una regla que permita la sustitución de los equivalentes *materiales* demostrados[202].

"Principios-T" en S1

Como hemos dicho la regla de la Necesariedad no es válida sin restricciones en S1. En particular existen algunas tesis S1 en las que el principal operador es $\supset$ pero que dejan de ser tesis si el $\supset$ es sustituido por $\dashv$. Como ejemplo tenemos

$$\vdash_{S1} (p \supset p) \supset (p \dashv p)$$

pero la fórmula correspondiente,

$$(1)\ (p \supset p) \dashv (p \dashv p)$$

no es una tesis de S1.

(Obsérvese que si (1) fuese una tesis tendríamos el siguiente resultado. Sustituyendo $p \supset p/q$ y $p \dashv p/q$ en TS1.21 (en la forma $(p \dashv q) \supset (Lp \supset Lq)$ obtenemos

$$((p \supset p) \dashv (p \dashv p)) \supset (L(p \supset p) \supset L(p \dashv p)$$

Si (1) fuese una tesis, entonces, puesto que $L(p \supset p)$ lo es ciertamente, podríamos separar dos veces para obtener $L(p \dashv p)$ y por tanto su equivalente $LL(p \supset p)$. Pero, como ya hemos observado no existen tesis S1 de la forma $LL\alpha$).

Ahora bien, el hecho de que fórmulas tales como (1) no sean tesis de S1 le pre-

---

201 Åqvist 1964.

202 Cresswell 1960, pág. 60 *et seq.*

senta a Lewis una cierta dificultad. Ya que él se proponía que la relación expresada mediante $\dashv\!\exists$ fuese tal que siempre que se "afirme" (assert) una implicación material (es decir siempre que una fórmula $(\alpha \supset \beta)$ sea una tesis) entonces la correspondiente implicación estricta pueda ser también afirmada (es decir $(\alpha \dashv\!\exists\, \beta)$ sea una tesis)[203]; y en ese caso fórmulas tales como (1) o fórmulas que, por así decirlo, realicen la misma función –*deben* (ought to) ser tesis. Para vencer esta dificultad, Lewis introduce lo que él denomina *principios-T*[204].

Estos pueden explicarse como sigue: En todos los casos en que $(\alpha \supset \beta)$ sea un teorema pero $(\alpha \dashv\!\exists\, \beta)$ no lo sea, existe algún teorema, al que se denomina "T", tal que $\vdash (\alpha \cdot T) \dashv\!\exists\, \beta)$. La prueba de que ello es así es muy sencilla: ya que T puede ser simplemente la propia $(\alpha \supset \beta)$, que, por hipótesis, es un teorema, y de acuerdo con TS1.12 tenemos $\vdash ((\alpha \cdot (\alpha \supset \beta)) \dashv\!\exists\, \beta)$, es decir $\vdash ((\alpha \cdot T) \dashv\!\exists\, \beta)$. No hace falta que T sea siempre $(\alpha \supset \beta)$, sin embargo, y muy a menudo existe una tesis más breve que realiza la misma función igualmente bien. Entre los más importantes *principios-T* figuran éstos:

TS1.24 $((p \dashv\!\exists\, q) \cdot T) \dashv\!\exists\, ((p \cdot r) \dashv\!\exists\, (q \cdot r))$
TS1.25 $((p \dashv\!\exists\, q) \cdot (p \dashv\!\exists\, r) \cdot T) \dashv\!\exists\, (p \dashv\!\exists\, (q \cdot r))$
TS1.26 $((p \dashv\!\exists\, (q \cdot r)) \cdot T) \dashv\!\exists\, ((p \dashv\!\exists\, q) \cdot (p \dashv\!\exists\, r))$

Se omiten aquí las pruebas, pero se encontrarán en Lewis y Langford[205].

Para ver la importancia de los principios-*T* en S1 considérese TS1.24. Tomado como principio de inferencia (y es intención de Lewis que todas las tesis cuyo operador principal es $\dashv\!\exists$ puedan ser así consideradas) esto nos asegura que una proposición de la forma $((p \cdot r) \dashv\!\exists\, (q \cdot r))$ puede ser inferida válidamente a partir de dos premisas: (a) la proposición correspondiente de la forma $(p \dashv\!\exists\, q)$ y (b) alguna proposición que tenga la forma de una tesis de S1. Pero (b) *tiene que* (is bound to) ser verdadera; por tanto la verdad de (a) es suficiente para garantizar la verdad de la conclusión. Por tanto, como principio de inferencia TS1.24 "puede ser usado exactamente igual que si el T no apareciese en él"[206], aunque sin el T no sea una tesis de S1. Consideraciones análogas se aplican a los demás principios-*T*.

El sistema S2

El Sistema S2 se obtiene añadiendo a S1 el axioma

AS2.1 $M(p \cdot q) \dashv\!\exists\, Mp$

Lewis denomina a éste *Postulado de Consistencia* (Consistency Postulate)[207]. Significa que sólo una proposición posible (o *consistente*) puede ser un término en una conjunción consistente.

En S2 algunos principios-*T* de S1 son demostrables sin el T. Esto se aplica a todos los TS1.24-TS1.26[208]. Sin embargo, la regla de la Necesariedad no es demos-

---

203 Lewis and Langford 1932, págs. 152, 245.

204 *Ibid.* págs. 147-153. Obsérvese que "T" tal como se usa en este contexto no tiene relación alguna con el Sistema T.

205 *Ibid.*, págs. 147, 148, 150, donde los teoremas se numeran como **16.1, 16.2 y 16.5**, respectivamente.

206 *Ibid.*, pág. 147. Obsérvese que nuestra prueba anterior de que MP es válido en S1 para la implicación material, en efecto dirige la atención al mismo resultado.

207 *Ibid.*, págs. 166-167.

208 Ibid., págs. 171-172.

trable de forma no restringida ni siquiera en S2 (*vide* pág. 211) y no podemos prescindir de los principios-*T* por completo. Por ejemplo, la fórmula numerada como (1) en la sección anterior, a saber

$$(p \supset p) \dashv\!\vdash (p \dashv\!\vdash p)$$

no es un teorema de S2, aunque por supuesto tenemos

$$\vdash_{S2} ((p \supset p) \cdot T) \dashv\!\vdash (p \dashv\!\vdash p)$$

S2, aunque es más fuerte que S1, no es tan fuerte como T[209].

Ahora demostramos un par de teoremas S2 y luego una regla importante.

TS2.1 $Mp \dashv\!\vdash M(p \vee q)$

PRUEBA

AS2.1 $[p \vee q/p, p/q]$:	(1)	$M((p \vee q) \cdot p) \dashv\!\vdash M(p \vee q)$	
CP $\vdash (((p \vee q) \cdot p) \equiv p)$ x N(S1):	(2)	$((p \vee q) \cdot p) = p$	
(1), (2) x Eq:	(3)	$Mp \dashv\!\vdash M(p \vee q)$	**Q.E.D.**

TS2.2. $L(p \cdot q) \dashv\!\vdash Lp$

PRUEBA

TS2.1 $[\sim p/p, \sim q/q]$:	(1)	$M \sim p \dashv\!\vdash M(\sim p \vee \sim q)$	
CP (De Morgan) x N(S1):	(2)	$(\sim p \vee \sim q) = \sim (p \cdot q)$	
(1), (2) x Eq:	(3)	$M \sim p \dashv\!\vdash M \sim (p \cdot q)$	
(3), TS1.4b x Eq:	(4)	$\sim M \sim (p \cdot q) \dashv\!\vdash \sim M \sim p$	
(4) x Def L:	(5)	$L(p \cdot q) \dashv\!\vdash Lp$	**Q.E.D.**

Un corolario simple de TS2.2, de acuerdo con TS1.1 es:

TS2.2a $L(p \cdot q) \dashv\!\vdash Lq$

Podemos ahora derivar una regla que es uno de los aspectos característicos de S2. Esta regla (o alguna forma íntimamente relacionada con ella) se denomina a menudo *Regla de Becker* (Becker's Rule)[210].

---

[209] De hecho, si pudiésemos prescindir de principios-*T* en S2 (o en S1) totalmente –es decir si siempre que tuviésemos $\vdash ((\alpha \cdot T) \dashv\!\vdash \beta)$ tuviéramos $\vdash (\alpha \dashv\!\vdash \beta)$– tendríamos el sistema T, por la siguiente razón. Supóngase que $\vdash \gamma$. Entonces (de acuerdo con CP) $\vdash ((p \supset p) \supset \gamma)$. Pero a partir de TS1.12 tenemos $\vdash (((p \supset p). ((p \supset p) \supset \gamma)) \dashv\!\vdash \gamma)$; y puesto que $(p \supset p) \supset \gamma$ es una tesis, podemos expresar esto como el principio-*T* $\vdash (((p \supset p) . T) \dashv\!\vdash \gamma)$. Así pues, si pudiésemos prescindir de todos los principios-*T*, tendríamos, siempre que γ sea una tesis, $\vdash ((p \supset p) \dashv\!\vdash \gamma)$. De esto se sigue, de acuerdo con TS1.21a, que $\vdash (L(p \supset p) \supset L\gamma)$; y por tanto puesto que de acuerdo con TS1.2 y TS1.15 tenemos $\vdash L(p \supset p)$, tendríamos $L\gamma$. Es decir la regla de la Necesariedad sería válida de forma no restringida y resultaría un sistema por lo menos tan fuerte como T. Además en T todos los principios-*T* pueden ser eliminados, ya que mediante pasos evidentes tenemos

$$\vdash_T ((\alpha \cdot T) \dashv\!\vdash \beta) \rightarrow \vdash_T (T \dashv\!\vdash (\alpha \supset \beta)) \rightarrow \vdash_T (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash_T (\alpha \dashv\!\vdash \beta)$$

Por tanto si pudiésemos prescindir de todos los principios-*T* en S2 (o en S1) tendríamos exactamente el sistema T.

[210] Becker [1930] pág. 522 establece esta regla para cualquier modalidad "afirmativa" (es decir cualquier secuencia de operadores monádicos que contenga un número par de signos de negación). Churchman [1938], pág. 79), quien le da el nombre de "Regla de Becker" la

RB $\vdash (\alpha \dashv\exists\ \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha \dashv\exists\ L\beta)$

PRUEBA

CP x N(S1):	(1)	$(p \cdot \sim q) = (p \cdot \sim (p \cdot q))$
TS1.2 $[\sim M(p \cdot \sim q)/p]$, (1) x Eq:	(2)	$\sim M(p \cdot \sim q) \dashv\exists\ \sim M(p \cdot \sim (p \cdot q))$
(2) x Def $\dashv\exists$:	(3)	$(p \dashv\exists\ q) \dashv\exists\ (p \dashv\exists\ (p \cdot q))$
Dado:	(4)	$\alpha \dashv\exists\ \beta$
(4), (3) $[\alpha/p, \beta/q]$ x MP:	(5)	$\alpha \dashv\exists\ (\alpha \cdot \beta)$
AS1.2 $[\alpha/p, \beta/q]$:	(6)	$(\alpha \cdot \beta) \dashv\exists\ \alpha$
(5), (6) x Adj, x Def =:	(7)	$\alpha = (\alpha \cdot \beta)$
TS1.2 $[L\alpha/p]$, (7) x Eq:	(8)	$L\alpha \dashv\exists\ L(\alpha \cdot \beta)$
TS2.2a $[\alpha/p, \beta/q]$:	(9)	$L(\alpha \cdot \beta) \dashv\exists\ L\beta$
(8), (9) x Sil:	(10)	$L\alpha \dashv\exists\ L\beta$ **Q.E.D.**

Obsérvese que al probar RB hemos utilizado (en el paso (9)) TS2.2a, que a su vez depende del axioma especial S2 AS2.1. RB no puede ser en realidad demostrada en S1. Lo más próximo a RB en S1 es

$$\vdash (\alpha \dashv\exists\ \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha \supset L\beta)$$

Sin embargo tenemos, en cambio, en S1:

$$\vdash (\alpha = \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha = L\beta)$$

y también, lo cual resulta muy interesante, ya que la prueba anterior hace uso sólo de Principios S1 hasta el paso (8):

$$\vdash (\alpha \dashv\exists\ \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha \dashv\exists\ L(\alpha \cdot \beta))$$

A primera vista ésta puede parecer una regla más fuerte que la propia RB—$L(\alpha \cdot \beta)$ parece afirmar más que $L\beta$— y puede parecer sorprendente encontrarla en el sistema más débil. Pero esta impresión es sólo superficial. Lo que hay que recordar aquí es que $L(p \cdot q) \dashv\exists\ Lq$ no es una tesis de S1, por muy principio "natural" que pueda parecer. De hecho su ausencia de S1 es un modo de señalar las limitaciones de ese sistema.

RB nos permite demostrar en S2 las "paradojas de la implicación estricta" en sus formas más fuertes (cf. TS1.22 y TS1.23):

TS2.3 $Lp \dashv\exists\ (q \dashv\exists\ p)$

PRUEBA

CP x N (S1):	(1)	$p \dashv\exists\ (q \supset p)$
(1) x RB:	(2)	$Lp \dashv\exists\ L(q \supset p)$
(2), TS1.15 x Eq:	(3)	$Lp \dashv\exists\ (q \dashv\exists\ p)$ **Q.E.D.**

TS2.4 $\sim Mp \dashv\exists\ (p \dashv\exists\ q)$

---

demuestra en S2 en la forma que hemos proporcionado. No debe confundirse con la regla $\vdash \alpha \supset \beta \rightarrow \vdash L\alpha \supset L\beta$ (nuestra RD1 de la I Parte) que no es una regla de S2 y que, si se añadiese, produciría T. (A partir de $\vdash (p \supset p) \supset L(p \supset p)$ tendríamos $\vdash L(p \supset p) \supset LL(p \supset p)$ y por tanto $\vdash LL(p \supset p)$, que hemos demostrado que produce T).

Queda para el lector la prueba.

El sistema S3

Aunque la Regla de Becker pertenece a S2, la fórmula

$$(1)\quad (p \dashv q) \dashv (Lp \dashv Lq)$$

que podría confundirse con ella, no es una tesis de S2. (La fórmula en cuestión no debe ser confundida con la regla, ni su ausencia de S2 debe ocasionar sorpresa; guarda la misma relación con la regla como el axioma de S4 $Lp \dashv LLp$, el cual por supuesto no está T, con la regla $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$, que *está* en T).

A pesar de ello bien pudiéramos desear contar con (1) como tesis, y si la añadimos a S2 (o a S1, indiferentemente) obtenemos el sistema S3. En realidad Lewis construye S3[211] añadiendo a la base de S1 no (1) sino

AS3.1 $(p \dashv q) \dashv (\sim Mq \dashv \sim Mp)$

(1), sin embargo, se deriva entonces fácilmente, como sigue:

TS3.1 $(p \dashv q) \dashv (Lp \dashv Lq)$

PRUEBA

AS3.1 $[\sim q/p, p/q]$:	(1)	$(\sim q \dashv \sim p) \dashv (\sim M \sim p \dashv \sim M \sim q)$	
(1), TS1.4b x Eq, x Def L:	(2)	$(p \dashv q) \dashv (Lp \dashv Lq)$	**Q.E.D.**

(AS3.1 podría ser derivado de TS3.1 mediante una prueba similar, por tanto es indiferente cuál de los dos tomemos como axioma S3 característico).

El que S3 contiene a S2 puede demostrarse derivando AS2.1 en S3.

TS3.2 [AS2.1] $M(p \cdot q) \dashv Mp$

PRUEBA

AS3.1 $[p \cdot q/p, p/q]$:	(1)	$((p \cdot q) \dashv p \dashv (\sim Mp \dashv \sim M(p \cdot q))$	
AS1.2, (1) x MP:	(2)	$\sim Mp \dashv \sim M(p \cdot q)$	
(2), TS1.4b x Eq:	(3)	$M(p \cdot q) \dashv Mp$	**Q.E.D.**

TS3.3 $Lp \dashv (Lq \dashv Lp)$

PRUEBA

TS2.3:	(1)	$Lp \dashv (q \dashv p)$	
TS3.1 $[q/p, p/q]$:	(2)	$(q \dashv p) \dashv (Lq \dashv Lp)$	
(1), (2) x Sil:	(3)	$Lp \dashv (Lq \dashv Lp)$	**Q.E.D.**

Las fórmulas obtenidas en un número de importantes tesis CP sustituyendo en todos los lugares en que aparezca $\supset$ por $\dashv$ son demostrables en S3 aunque no en S1 o en S2. Entre ellas figuran las análogas de Comp y las dos leyes del Silogismo:

---

211 Lewis and Langford [1932], págs. 493, 500. S3 es el sistema de Lewis [1918], págs. 294, 295 (el sistema *Survey*) en el que a los axiomas se les denomina 1.1–1.8; 1.8 aparece (en la notación *Survey* con $\sim$ como imposibilidad y – como negación) como $(p \dashv q) = (\sim q \dashv \sim p)$. Se mostró que esto proporciona $\sim p = -p$ y en Lewis [1920] se modificó quedando como $(p \dashv q) \dashv (\sim q \dashv \sim p)$. En [1932], $\sim$ se sustituye por $\sim \Diamond$ y los axiomas modificados se enu-

TS3.4 $(p \dashv\!\exists\, q) \dashv\!\exists ((p \dashv\!\exists\, r) \dashv\!\exists (p \dashv\!\exists (q \cdot r)))$

PRUEBA

Comp x N(S1): (1) $(p \supset q) \dashv\!\exists ((p \supset r) \supset (p \supset (q \cdot r)))$

(1) x RB, x TS1.15: (2) $(p \dashv\!\exists\, q) \dashv\!\exists ((p \supset r) \dashv\!\exists (p \supset (q \cdot r)))$

TS3.1 $[p \supset r/p, p \supset (q \cdot r)/q]$ x TS1.15:

(3) $((p \supset r) \dashv\!\exists (p \supset (q \cdot r))) \dashv\!\exists (p \dashv\!\exists\, r) \dashv\!\exists (p \dashv\!\exists (q \cdot r)))$

(2), (3) x Sil: (4) $(p \dashv\!\exists\, q) \dashv\!\exists ((p \dashv\!\exists\, r) \dashv\!\exists (p \dashv\!\exists (q \cdot r)))$ **Q.E.D.**

TS3.5 $(p \dashv\!\exists\, q) \dashv\!\exists ((q \dashv\!\exists\, r) \dashv\!\exists (p \dashv\!\exists\, r))$

TS3.6 $(q \dashv\!\exists\, r) \dashv\!\exists ((p \dashv\!\exists\, q) \dashv\!\exists (p \dashv\!\exists\, r))$

TS3.7 $LLq \dashv\!\exists (Lp \dashv\!\exists\, LLp)$[212]

PRUEBA

TS3.3 $[Lq/p, p/q]$: (1) $LLq \dashv\!\exists (Lp \dashv\!\exists\, LLq)$

TS3.1 $[Lq/p, Lp/q]$: (2) $(Lq \dashv\!\exists\, Lp) \dashv\!\exists (LLq \dashv\!\exists\, LLp)$

TS3.3, (2) x Sil: (3) $Lp \dashv\!\exists (LLq \dashv\!\exists\, LLp)$

TS3.4 $[Lp/p, LL\,q \dashv\!\exists\, LLp/q, LLq/r]$:

(4) $(Lp \dashv\!\exists (LLq \dashv\!\exists\, LLp)) \dashv\!\exists ((Lp \dashv\!\exists\, LLq) \dashv\!\exists (Lp \dashv\!\exists ((LLq \dashv\!\exists\, LLp) \cdot LLq)))$

(3), (4) x MP: (5) $(Lp \dashv\!\exists\, LLq) \dashv\!\exists (Lp \dashv\!\exists ((LLq \dashv\!\exists\, LLp) \cdot LLq)$

AS1.6 $[LLq/p, LLp/q]$ TS1.1 x Eq:

(6) $((LLq \dashv\!\exists\, LLp) \cdot LLp) \dashv\!\exists\, LLp$

TS3.6 $[(LLq \dashv\!\exists\, LLp) \cdot LLq/q, LLp/r, Lp/p]$, (6) x MP:

(7) $(Lp \dashv\!\exists ((LLq \dashv\!\exists\, LLp) \cdot LLq)) \dashv\!\exists (Lp \dashv\!\exists\, LLp)$

((1), (5) x Sil), (7) x Sil: (8) $LLq \dashv\!\exists (Lp \dashv\!\exists\, LLp)$ **Q.E.D.**

Una característica importante de S3 es la de que, a diferencia de S1 y S2, y también a diferencia de T, pero al igual que S4 y S5, contiene teoremas que permiten reducir las modalidades (pág. 51). W.T. Parry ha demostrado de hecho que existen únicamente 42 modalidades distintas en S3[213].

S3 es, sin embargo, semejante a S2 y S1 (y diferente a T, S4 y S5) en que no contiene la regla de la Necesariedad (N) de forma no restringida. TS3.7 es importante porque si S3 contuviese N podríamos usar este teorema para derivar $\vdash (Lp \dashv\!\exists\, LLp)$, que es el axioma S4 característico[214]. La derivación se efectuaría

---

meran en la pág. 493 como A1–A8. A8 es nuestro AS3.1. A1–A7 no son idénticos a nuestros axiomas S1 (que son B1–B7 de [1932]), pero forman un conjunto axiomático alternativo para S1. Para un estudio de S3 *vide* Parry [1939].

[212] Para este teorema y su prueba *vide* Parry [1939]. Nuestro TS3.7 es el 32.1 de Parry (pág. 141).

[213] *Ibid.*, esp. págs. 144-148.

[214] Es decir el axioma S4 de Lewis. El axioma S4 que utilizamos en el Capítulo 3 era $Lp \supset LLp$, pero, puesto que nuestra base para S4 contenía N como regla primitiva, los dos son *evidentemente* intercambiables.

del modo siguiente: Sea α cualquier tesis de S3. Luego de acuerdo con N, $\vdash L\alpha$; y de acuerdo con N, otra vez, $\vdash LL\alpha$. Ahora ponemos en TS3.7 α/q y luego MP inmediatamente proporciona $\vdash (Lp \dashv LLp)$. Desde luego si S3, incluso en ausencia de N, contuviese cualquier tesis de la forma $LL\alpha$, podríamos derivar $\vdash (Lp \dashv LLp)$ poniendo α/q en TS3.7 y separando. Por tanto si ya bien N o ya bien cualquier tesis de la forma $LL\alpha$ se añadiese a S3 obtendríamos un sistema por lo menos tan fuerte como S4.

Demostraremos posteriormente (pág. 202) que $Lp \dashv LLp$ no es una tesis de S3. A la vista del argumento anterior este resultado constituirá una prueba de que ni N ni ninguna tesis de la forma $LL\alpha$ está en S3 –ni por supuesto en S2 o S1 tampoco.

El sistema S4

En el capítulo 3 construimos el sistema que denominábamos S4 añadiendo a T el axioma extra $Lp \supset LLp$. Lewis obtiene este sistema S4 –es decir S4 en su forma original– añadiendo a S1 el axioma extra[215]:

AS4.1 $Lp \dashv LLp$

$\vdash (Lp \supset LLp)$, por supuesto, se sigue inmediatamente de esto de acuerdo con TS1.11.

Podemos mostrar que S4 contiene a S3 (y por consiguiente S2) derivando AS3.1 en S4.

Primero demostramos:

TS4.1 $(p \dashv q) \dashv L(p \dashv q)$

PRUEBA

AS4.1 $[p \supset q/p]$: (1) $L(p \supset q) \dashv LL(p \supset q)$

(1), TS1.15 x Eq: (2) $(p \dashv q) \dashv L(p \dashv q)$ **Q.E.D.**

TS4.2 $(p \dashv q) \dashv (Lp \dashv Lq)$

PRUEBA

TS1.21a $[p \dashv q/p, Lp \supset Lq/q]$:

(1) $((p \dashv q) \dashv (Lp \supset Lq)) \dashv (L(p \dashv q) \supset L(Lp \supset Lq))$

TS1.21a x TS4.1: (2) $L((p \dashv q) \dashv (Lp \supset Lq))$

TS1.21a $[(p \dashv q) \dashv (Lp \supset Lq)/p, L(p \dashv q) \supset L(Lp \supset Lq)/q]$:

(3) $(1) \dashv ((2) \supset L(L(p \dashv q) \supset L(Lp \supset Lq)))$

(1), (2), (3) x MP, x MP (Para $\supset$):

(4) $L(L(p \dashv q) \supset L(Lp \supset Lq))$

(4), TS1.15 x Eq: (5) $L(p \dashv q) \dashv (Lp \dashv Lq)$

---

215 La sugerencia de considerar a $Lp \dashv LLp$ como axioma extra procede de Becker [1930], pág. 514. Becker lo denomina 1.92 siguiendo al 1.8 (modificado) del *Survey* (pág. 295). En la notación Survey 1.92 es $\sim - p \dashv \sim - \sim - p$. Lewis and Langford escriben esto como $\sim \Diamond \sim p \dashv \sim \Diamond \sim \sim \Diamond \sim p$ (C10, pág. 497) y definen S4 como S1 + C10 ([1932] pág. 501).

TS4.1, (5) × Sil: (6) $(p \dashv q) \dashv (Lp \dashv Lq)$ **Q.E.D.**

TS4.3 [AS3.1] $(p \dashv q) \dashv (\sim Mq \dashv \sim Mp)$

PRUEBA

TS4.2 $[\sim q/p, \sim p/q]$, Def L: (1) $(\sim q \dashv \sim p) \dashv (\sim M \sim\sim q \dashv \sim M \sim\sim p)$

(1), TS1.4b, TS1.9 × Eq: (2) $(p \dashv q) \dashv (\sim Mq \dashv \sim Mp)$ **Q.E.D.**

Hemos demostrado ahora que S4 contiene a S3. A continuación demostraremos que la regla no restringida de la Necesariedad es válida en S4[216].

N: $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$

PRUEBA

De acuerdo con TS4.1 $[p/q]$ y TS1.15 tenemos $\vdash_{S4} ((p \dashv p) \dashv LL\,(p \supset p))$, y por tanto de acuerdo con TS1.2 y MP, $\vdash_{S4} LL\,(p \supset p)$. Pero sabemos (pág. 190 y s.) que la adición a S1 de cualquier tesis de la forma $LL\alpha$ proporciona un sistema en el que la regla no restringida de la Necesariedad es válida.

De este modo todos los axiomas y reglas del S4 de la I Parte son demostrables en el S4 de Lewis, y puesto que (como es fácil de demostrar) lo inverso también es válido, los dos sistemas son deductivamente equivalentes. Esta fue, por supuesto, nuestra justificación para dar el mismo "S4" al sistema de la I Parte, en primer lugar.

El sistema S5

El sistema S5 de Lewis es S1 con la adición de[217]

AS5.1 $Mp \dashv LMp$

S5 contiene a S4. Primero demostramos:

TS5.1 $Mp = LMp$

PRUEBA

AS5.1 (1) $Mp \dashv LMp$

TS1.18a $[Mp/p]$: (2) $LMp \dashv Mp$

(1), (2) × Adj × Def =: (3) $Mp = LMp$ **Q.E.D.**

TS5.2 $Lp = LLp$

PRUEBA

TS1.3 $[Lp/p]$ × Def L: (1) $Lp = \sim M \sim p$

(1), TS5.1 $[\sim p/p]$ × Eq: (2) $Lp = \sim LM \sim p$

(2) × Def L: (3) $Lp = \sim\sim M \sim M \sim p$

(3), TS1.9 × Eq, × Def L: (4) $Lp = MLp$

---

216 La primera demostración de que N es una regla del S4 de Lewis parece ser la que nos ofrecen McKinsey and Tarski [1948], pág. 5 (teorema 2.1).

217 Esto procede del 1.9 de Becker ([1930], pág. 511): $- \sim p \dashv \sim\sim p$. Lewis and Langford lo escriben como $\Diamond p \sim \Diamond \sim \Diamond p$ (C11, pág. 497).

(4), TS5.1 $[Lp/p]$ x Eq: (5) $Lp = LMLp$

(5), (4) x Eq: (6) $Lp = LLp$ **Q.E.D.**

El axioma S4, $Lp \dashv LLp$, evidentemente se sigue fácilmente a partir de este último teorema. Por tanto S5 contiene a S4, y por supuesto a S3 y S2 también[218].

AS5.1 es simplemente la forma estricta del axioma S5 del capítulo 4, $Mp \supset LMp$, y en virtud de N derivable a partir de él. Por tanto el S5 de Lewis es el mismo sistema que nuestro anterior S5.

[218] Sobociński [1962a] muestra que si tenemos AS5.1 y AS3.1 podemos prescindir de AS1.6 como axioma. Churchman [1938] (págs. 78-81) obtiene S5 a partir de S2 mediante la adición de $\vdash (p \dashv \sim MM \sim Mp)$.

CAPITULO XIII

LOS SISTEMAS LEWIS (II)

La diferenciación entre S1–S5[219]

En nuestra exposición anterior de S1–S5 del capítulo precedente demostramos que cada sistema sucesivo contiene a todos los anteriores. Demostraremos ahora que ninguno de los sistemas está contenido en ninguno de los anteriores, y, por tanto, ninguno es deductivamente equivalente a cualquiera de los demás.

Para hacer esto demostramos (1) que el axioma S2 característico

AS2.1 $M(p \cdot q) \dashv M p$

no es un teorema de S1; (2) de modo semejante

AS3.1 $(p \dashv q) \dashv (\sim Mq \dashv \sim Mp)$

no es un teorema de S2; (3)

AS4.1 $Lp \dashv LLp$

no es un teorema de S3 y finalmente (4)

AS5.1 $Mp \dashv LMp$

no es un teorema de S4[220]

Nuestro método general (habitual para las lógicas proposicionales) será el mismo en todos los casos. Para cada sistema damos un conjunto, K, de valores (representado por numerales) dentro del cual ha de considerarse que oscilan las variables. A partir de este conjunto seleccionamos uno o más como valores *designados*. Luego damos un conjunto de *matrices* (tablas de valores) una para cada uno de los operadores primitivos, que nos permite calcular el valor de cualquier fbf, una vez que hayamos asignado un valor a cada una de sus variables. El conjunto de matrices tendrá las siguientes características:

(a) Cada axioma del sistema en cuestión tomará uno de los valores designados para cada asignación de valores a las variables del mismo.

(b) Si cualquier regla de transformación del sistema se aplica a una fórmula o fórmulas que tomen sólo el valor o valores designados entonces la fórmula resultante

---

219 Las conclusiones de esta sección se encuentran todas en los Apéndices II y III de Lewis and Langford [1932] (págs. 492-514), donde se indican sus diversas procedencias. (El Apéndice III está contenido en la re-edición de 1959 pero no en la edición original de 1932).

220 Por supuesto ya hemos demostrado mediante otro método (págs. 65-68) que S4 no contiene a S5.

tomará sólo el valor o valores designados. (Se dice de una matriz que cumpla la condición (b) que es *hereditaria* (hereditary) con respecto a las reglas de transformación en cuestión).

(c) El axioma característico del sistema que sigue tomará un valor no designado para algunas asignaciones de valores a sus variables.

Evidentemente de (a) y (b) se sigue que todo teorema del sistema toma sólo uno de los valores designados; de aquí que a partir de (c) se siga que el axioma característico del sistema que sigue no sea teorema del anterior.

(1) Demostramos que $M(p \cdot q) \dashv M p$ no es un teorema de S1.

Sea K = {1, 2, 3, 4} .(Es decir, cada variable puede tomar cualquiera de los valores 1, 2, 3, 4, pero no ningún otro). Los valores designados son 1 y 2. Las matrices son como sigue[221]:

p	$\sim p$	Mp
1	4	1
2	3	2
3	2	1
4	1	3

p

$p \cdot q$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	4	4
3	3	4	3	4
4	4	4	4	4

p

$p \dashv q$	1	2	3	4
1	2	4	3	4
2	2	2	3	3
3	2	4	2	4
4	2	2	2	2

(La matriz para $\dashv$ es un lujo teórico sólo, aunque es conveniente tenerla; se calcula simplemente a partir de las otras mediante Def $\dashv$ —es decir, señala los valores de $\sim M(p \cdot \sim q)$ para cada asignación de valores a p y q).

Es una cuestión lenta y pesada, pero sencilla y mecánica, el comprobar que todos los axiomas de S1 toman sólo uno de los valores designados 1 y 2 para cada asignación de valores a sus variables.

Tenemos ahora que demostrar que las cuatro reglas de transformación de S1 preservan esta característica.

Sea α alguna fórmula a la que se aplique *sustitución uniforme*, y sea p la variable de α por la que se sustituye la fbf β. Entonces, por hipótesis, α toma uno de los valores designados sin tener en cuenta qué valor (en K) se asigne a p. Pero sean cuales sean los valores asignados a las variables de β, β debe tomar algún valor en K. Por tanto, la sustitución uniforme de p por β no puede llevar a ningún valor no designado para la fórmula resultante como un todo.

A continuación, considérese la *sustitución de equivalentes estrictos*. Si una fórmula $(\alpha = \beta)$ tiene el valor 1 ó 2, entonces por Def = y la matriz para $\cdot$, cada $(\alpha \dashv \beta)$ y $(\beta \dashv \alpha)$ debe tener el valor 1 ó 2; y de acuerdo con la matriz para $\dashv$ esto sólo puede ocurrir así cuando α y β tienen el mismo valor. Por tanto, la sustitución de α por β en una fórmula cualquiera no puede alterar su valor.

Para la *Adjunción*, es evidente a partir de la tabla para $\cdot$ que si tanto α como β toman un valor designado también lo toma $(\alpha \cdot \beta)$.

Finalmente para el *Modus Ponens*, la tabla para $\dashv$ muestra que los únicos casos en los que α y $(\alpha \dashv \beta)$ toman ambos o el valor 1 o el valor 2 son aquéllos en los que β igualmente toma 1 ó 2.

---

221 Lewis and Langford [1932], págs. 493-494. Estas matrices son su Grupo V.

Puesto que todo teorema de S1 es una transform de los axiomas de S1 de acuerdo con una o más de estas reglas, todo teorema toma un valor designado para cada asignación de valores (en K) a sus variables.

Ahora considérese AS2.1 $(M(p \cdot q) \dashv M p)$

Cuando $p=2$ y $q=4$, AS2.1 $=M(2,4) \dashv$ M2) $=$ (M4 $\dashv$ M2) $=(3 \dashv 2)=4$. Es decir, AS2.1 puede tomar un valor no designado. Por tanto no es un teorema de S1.

(2) Para demostrar que AS3.1 no es un teorema de S2 utilizamos una matriz de 8 valores descubierta por W. T. Parry[222]. Para esto tenemos

$$K=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

y los valores designados son 6 y 7. Las matrices son:

p	$\sim p$	Mp
0	7	1
1	6	5
2	5	7
3	4	7
4	3	7
5	2	7
6	1	7
7	0	7

p	$p \cdot q$	q: 0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	2	0	0	2	2	0	0	2	2
3	3	0	1	2	3	0	1	2	3
4	4	0	0	0	0	4	4	4	4
5	5	0	1	0	1	4	5	4	5
6	6	0	0	2	2	4	4	6	6
7	7	0	1	2	3	4	5	6	7

Estas matrices son hereditarias con respecto a las reglas de transformación, y cada axioma (y por consiguienteccada teorema) de S2 toma un valor designado. Pero para AS3.1, cuando $p=1$ y $q=0$, $(p \dashv q) \dashv (\sim Mq \dashv \sim Mp)=0$.

(3) A continuación demostramos que AS4.1 no es un teorema de S3. Como en la prueba de que AS2.1 no está en S1 tenemos

$$K=\{1,2,3,4\}$$

con 1 y 2 como valores designados. También tenemos las mismas matrices (de 4 valores) para $\sim$ y $\cdot$. Pero para M tenemos[223]:

p	Mp
1	1
2	1
3	1
4	3

y por tanto para $\dashv$ y L: p

$p \dashv q$	q: 1	2	3	4	Lp
1	2	4	4	4	2
2	2	2	4	4	4
3	2	4	2	4	4
4	2	2	2	2	4

Estas matrices son también hereditarias y todos los axiomas de S3 toman siempre un valor designado. Pero cuando $p=1$, AS4.1 se evalúa como sigue:

$$(L1 \dashv LL1)=(2 \dashv L2)=(2 \dashv 4)=4$$[224]

---

222 Esta matriz aparece en Parry [1934], pág. 79, y está citada en la segunda edición de Lewis and Langford [1932] en la pág. 507. Lewis en 1932 no había podido encontrar una prueba de la no derivabilidad de AS3.1 en S2 (*vide* pág. 496).

223 Lewis and Langford [1932], pág. 493 (Grupo I); y *vide* también pag. 498.

224 Lewis (*ibid.* pág. 498) dice que AS4.1 falla para estas matrices cuando $p=3$, pero esto es probablemente un desliz.

(4) Para la no derivabilidad de AS5.1 en S4 utilizamos nuevamente las mismas matrices de 4 valores para $\sim$ y para $\cdot$ y los mismos valores designados. Pero para M, y consecuentemente para $\dashv$, utilizamos[225]:

p	Mp
1	1
2	2
3	1
4	4

	$p \dashv q$	q: 1	2	3	4
p: 1	1	1	4	3	4
2	2	1	1	3	3
3	1	1	4	1	4
4	4	1	1	1	1

Las matrices son también hereditarias y todos los axiomas de S4 toman siempre un valor designado. Pero para AS5.1 tenemos, cuando $p=2$[226]:

$$(M2 \dashv \sim M \sim M2)=(2 \dashv \sim M \sim 2)=(2 \dashv \sim M3)=(2 \dashv \sim 1)=(2 \dashv 4)=3$$

S1-S5 son por tanto cinco sistemas diferentes, en orden ascendente de fortaleza (strength).

Hay otra conclusión más, de cierta importancia, que podemos establecer mediante nuestros presentes mecanismos. Para las siguientes matrices[227] ($\sim$ y $\cdot$, y los valores designados, al igual que antes) todo teorema de S5 toma siempre un valor designado:

p	Mp
1	1
2	1
3	1
4	4

	$p \dashv q$	q: 1	2	3	4
p: 1	1	1	4	4	4
2	2	1	1	4	4
3	3	1	4	1	4
4	4	1	1	1	1

Pero para $Mp \dashv p$, cuando $p=2$ tenemos:

$$(M2 \dashv 2)=(1 \dashv 2)=4$$

(y también, en este sentido, si $p=3$, $(Mp \dashv p)=4$). Por tanto $Mp \dashv p$ no es un teorema ni siquiera de S5[228].

La importancia de este resultado estriba en el hecho de que si $Mp \dashv p$ fuese una tesis de S5, entonces, puesto que su inversa, $p \dashv Mp$ es una tesis incluso de S1, tendríamos $\vdash_{S5} (Mp=p)$. En ese caso S5 degeneraría (would collapse) en CP, en el sentido explicado en la pág. 60 y s. Es la ausencia de S5 de tesis tales como $Mp \dashv p$ lo que impide que esto ocurra y preserva para S5 su status genuinamente modal.

---

225 *Ibid.*, pág. 493 (Grupo II).

226 Lewis (*ibid.*, pág. 498) dice que AS5.1 también falla para estas matrices cuando $p=4$, pero esto también parece ser un desliz.

227 Lewis (*ibid.*, pág. 493) Grupo III.

228 Lewis (*ibid.*, pág. 498) utiliza estas matrices para mostrar también que MMp no es una tesis de S5.

Otras bases para los sistemas Lewis

En 1953 Leo Simons[229] demostró que S3 puede derivarse del siguiente conjunto de axiomas:

H1 $p \dashv (p \cdot p)$
H2 $(p \cdot q) \dashv p$
H3 $((r \cdot p) \cdot \sim(q \cdot r)) \dashv (p \cdot \sim q)$
H4 $\sim Mp \supset \sim p$
H5 $p \dashv Mp$
H6 $(p \dashv q) \dashv (\sim Mq \dashv \sim Mp)$

y las reglas de la sustitución uniforme y la separación *material*[230].

No es difícil demostrar que este sistema está contenido en el S3 de Lewis: H1, H2 y H6 figuran entre los axiomas de Lewis; H5 se deriva fácilmente de TS1.18a, H3 de CP mediante N (S1), y H4 de H5 con la ayuda de TS1.4b y TS1.11; y la separación material es válida incluso en S1. Simons muestra que su sistema contiene a S3 derivando los axiomas y reglas S3[231]:

Simons también demuestra que cada uno de sus axiomas es independiente, y más aún, que el conjunto de axiomas ampliado por la adición de

H7 $MMp \dashv Mp$

permanece independiente. Ahora bien, H7 es una simple variante del axioma S4 especial $Lp \dashv LLp$; por tanto aquí tenemos un conjunto de axiomas independientes para S4.

Otro conjunto de axiomas para S4 consta de H1–H4, H6 y $\vdash \sim M \sim (p \dashv Mp)$, con las dos mismas reglas[232]. Feys también da una axiomatización de S4 con sólo estas dos reglas como primitivas, pero su conjunto de axiomas es un tanto más complicado que el de Simons[233].

Tendremos algo que decir acerca de S4 basado en primitivos distintos a M o L en las págs. 243-44.

Simons también sugiere el añadir a H1–H6 el axioma

H8 $Mp \dashv \sim M \sim Mp$

que proporcionaría S5; pero él no da prueba alguna de que todos los axiomas

---

229 Simons [1953]

230 Simons en realidad utiliza esquemas de axioma y por tanto no necesita una regla de sustitución uniforme; pero nosotros establecimos su sistema aquí según habíamos hecho previamente para las lógicas proposicionales.

231 Demuestra las reglas primitivas de Lewis de tal modo que siguen siendo válidas en ampliaciones cualesquiera. Así pues el añadir los mismos axiomas extra a su S3 y al de Lewis producirá el mismo sistema.

232 Simons [1962]. Anderson [1957] proporciona una base para T modificando los axiomas de Simons para S3 y S4 y cambiando la regla de separación por $\vdash \alpha, \vdash L\,\alpha \supset_{\beta,} \rightarrow \vdash \beta$. Kripke [1965b] pág. 219 demuestra que T y S2 (a diferencia de S3 y S4) no pueden tener una base que contenga solamente un número finito de esquemas con separación material como única regla de transformación primitiva. (Una base de este tipo se denomina a menudo base de "regla simplificada"). Lemmon [1965b] también demuestra esto mediante procedimientos algebraicos (*vide* Capítulo 17) y establece algunas condiciones generales según las cuales es válida la axiomaticibilidad finita en este sentido. (Es posible tener sistemas modales finitamente axiomatizables más débiles que S3 pero no son habituales). *Vide* Canty [1965].

233 Feys [1965], pág. 97.

serían entonces independientes. Anderson[234] da una axiomatización de S5 añadiendo a H1–H6:

$$(\sim M \sim p \dashv M p) \dashv (p \dashv \sim M \sim M p)$$

y muestra que éste es independiente utilizando las matrices de Simons. Sobociński[235] muestra que si tenemos H8 podemos omitir H5 y seguir teniendo S5.

Las bases que hemos mencionado hasta ahora en esta sección han sido semejantes a la propia de Lewis en que no han sido construidas mediante el método de adherir axiomas extra y/o reglas a una base CP. Sin embargo, es posible utilizar este método para cada uno de los sistemas de Lewis, como por supuesto hicimos para S4 y S5 en la I Parte. Existen varios modos de basar un sistema modal explícitamente en CP. Uno es el incluir en la base del sistema modal algún conjunto de axiomas y reglas (pongamos por caso las de PM) que se sepa que son suficientes para CP. Otro procedimiento, notacionalmente más sencillo, es tener la regla:

CP1 Si α es una fbf válida de CP, entonces $\vdash \alpha$

(Si adoptamos este segundo procedimiento las reglas de la sustitución uniforme y la separación no serán necesarias para derivaciones CP puras. Si los axiomas *modales* se establecen como esquemas (schemata) la regla de sustitución uniforme no hará falta en absoluto, pero si –como en los sistemas indicados a continuación– no son establecidos así, se necesitará para derivaciones que los implican. Y estén o no estén los axiomas modales establecidos como esquemas (schemata), se precisará alguna forma de la regla de separación para las derivaciones modales).

Los sistemas que desarrollaremos ahora se deben a E.J. Lemmon[236]. Por lo que se refiere a la base CP, utilizaremos una versión modificada del segundo procedimiento mencionado anteriormente[237]. CP1 no se utiliza como regla primitiva, pero se sigue directamente de una de las reglas primitivas y uno de los axiomas. (El tratar el asunto de este modo hace que el establecimiento de la totalidad de la base sea un tanto más breve). La sustitución uniforme y la separación material (MP) son reglas primitivas. De los operadores modales L se toma como primitivo, y M y $\dashv$ se definen (como en la I Parte) mediante:

$$M\alpha =_{\mathrm{Df}} \sim L \sim \alpha$$
$$(\alpha \dashv \beta) =_{\mathrm{Df}} L(\alpha \supset \beta)$$

Lemmon construye luego cuatro sistemas, a los que denomina P1–P4, cada uno con una base explícita CP, que son deductivamente equivalentes a S1–S4, respectivamente; y no existe dificultad en extender el proceso a S5.

Para P1 Lemmon tiene (en adición a la sustitución uniforme y la separación

---

234 Anderson [1956].

235 Sobonciński [1962a].

236 Lemmon [1957]. Lemmon también considera varios subsistemas de los sistemas Lewis. *Vide infra* págs. 246-248.

237 Lemmon (op. cit. 177) se refiere mediante CP a tres reglas:
CPa. Si α es válida (CP), entonces $\vdash \alpha$
CPb. Sustitución uniforme
CPc. Modus Ponens
Incluye CP en las bases de todos sus sistemas. Hacemos uso del hecho de que (en virtud de nuestra RP1.1 más adelante) CPb y CPc son las únicas reglas CP necesitadas.

material, como ya se mencionó, los siguientes axiomas y reglas (la numeración es nuestra):

AP1.1 $((p \dashv q) \cdot (q \dashv r)) \supset (p \dashv r)$
AP1.2 $Lp \supset p$

RP1.1 Si α es una fbf válida de CP o un axioma, entonces $\vdash L\,\alpha$[238].
RP1.2 (Sustitución de Equivalentes). Si α difiere de β sólo en tener una fbf γ en algunos de los lugares en los que β tiene a δ, entonces si $\vdash (\gamma = \delta)$, entonces $\vdash (\alpha = \beta)$.

Evidentemente, si α es una fbf válida de CP, entonces, de acuerdo con RP1.1, $\vdash L\,\alpha$, y entonces, de acuerdo con AP1.2 y MP, $\vdash \alpha$. Es decir, CP1 se sigue inmediatamente de RP1.1 y AP1.2.

Demostramos ahora que el S1 de Lewis contiene a P1.

La sustitución uniforme y RP1.2 son reglas primitivas de S1. AP1.1 es derivable de AS1.5 de acuerdo con TS1.11. AP1.2 es TS1.18a. Una parte de RP1.1 es proporcionada por N (S1); para la otra parte, si aplicamos TS1.15 a AS1.5 y TS1.18a, obtenemos

$$\vdash_{S1} L(((p \dashv q) \cdot (q \dashv r)) \supset (p \dashv r)) \text{ y } \vdash_{S1} L(Lp \supset p)$$

respectivamente (es decir el resultado de colocar L como prefijo a los axiomas P1). Por tanto RP1.1 es válido en S1. Finalmente tenemos en S1 equivalencias estrictas correspondientes a aquellas definiciones de P1 que no están en S1; vide pág. 187.

La prueba de que P1 contiene a S1 es como sigue:

AS1.1–AS1.5 se siguen de las tesis normales CP y AP1.1 de acuerdo con RP1.1 y Def $\dashv$. La regla de la Adjunción es válida en P1 porque de acuerdo con CP1 tenemos $\vdash (p \supset (q \supset (p \cdot q))$; de donde si $\vdash \alpha$ y $\vdash \beta$, dos separaciones proporcionan $\vdash (\alpha \cdot \beta)$. Para la separación estricta en P1: si $\vdash (\alpha \dashv \beta)$ entonces de acuerdo con Def $\dashv$ y AP1.2, tenemos $\vdash (\alpha \supset \beta)$; por tanto si $\vdash \alpha$ y $\vdash (\alpha \dashv \beta)$, entonces $\vdash \alpha$ y $\vdash (\alpha \supset \beta)$, y, por consiguiente, de acuerdo con la separación material, $\vdash \beta$.

Queda demostrar en P1 equivalencias correspondientes a las definiciones S1 de L y $\dashv$, y también AS1.6. Primero observamos que la siguiente regla es válida en P1:

RP1.3 Siendo α y β fbfs de CP, $\vdash (\alpha \equiv \beta) \rightarrow \vdash (\alpha = \beta)$
(La prueba es como en la pág. 189, ya que RP1.1 incluye a N (S1).)
Podemos demostrar ahora:

TP1.1 $Lp = {\sim}M{\sim}p$ [Para Def L en S1]

PRUEBA

$(p \equiv p)$ × RP1.3:	(1)	$p = p$
$(p \equiv {\sim}{\sim}p)$ × RP1.3:	(2)	$p = {\sim}{\sim}p$
(1) $[Lp/p]$, (2) × Eq:	(3)	$Lp = L{\sim}{\sim}p$
(3), (2) $[L{\sim}{\sim}p/p]$ × Eq:	(4)	$Lp = {\sim}{\sim}L{\sim}{\sim}p$
(4) × Def M:	(5)	$Lp = {\sim}M{\sim}p$ **Q.E.D.**

[238] Si el signo $\supset$ de AP1.1 y AP1.2 fuese sustituido por $\dashv$, y tuviésemos MP para la implicación *estricta*, la expresión "o un axioma" en RP1.1 podría omitirse.

TP1.2 $(p \dashv\!\supset q) = \sim M(p \cdot \sim q)$ [Para Def $\dashv\!\supset$ en S1]

PRUEBA

TP1.1 $[p \supset q/p]$:	(1) $L(p \supset q) = \sim M \sim (p \supset q)$	
$\vdash \sim(p \supset q) \equiv (p \cdot \sim q)$ x RP1.3:	(2) $\sim(p \supset q) = (p \cdot \sim q)$	
(1), (2) x Eq:	(3) $L(p \supset q) = \sim M(p \cdot \sim q)$	
(3) x Def $\dashv\!\supset$:	(4) $(p \dashv\!\supset q) = \sim M(p \cdot \sim q)$	**Q.E.D.**

TP1.3 $(p \cdot (p \dashv\!\supset q)) \dashv\!\supset q$ [AS1.6]

PRUEBA

CP x RP1.3:	(1) $(p \supset (q \supset r)) = ((q \cdot p) \supset r)$	
$\vdash (p \supset p)[L(p \supset (q \supset r))/p]$:	(2) $L(p \supset (q \supset r)) \supset L(p \supset (q \supset r))$	
(2), (1) x Eq:	(3) $L(p \supset (q \supset r)) \supset L((q \cdot p) \supset r)$	
AP1.2, x RP1.1:	(4) $L(Lp \supset p)$	
(4) $[p \supset q/p]$:	(5) $L(L(p \supset q) \supset (p \supset q))$	
(3) $[L(p \supset q)/p, p/q, q/r]$:	(6) $L(L(p \supset q) \supset (p \supset q)) \supset L((p \cdot L(p \supset q)) \supset q)$	
(5), (6) x MP, x Def $\dashv\!\supset$:	(7) $(p \cdot (p \dashv\!\supset q)) \dashv\!\supset q$	**Q.E.D.**

Esto completa la prueba de que P1 contiene a S1. Por tanto P1 y S1 son deductivamente equivalentes.

El P2 de Lemmon se forma a partir de P1 sustituyendo AP1.1 por

AP2.1 $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$

y RP1.2 (regla de sustitución de equivalentes) por

RP2.1 $\vdash L(\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash L(L\alpha \supset L\beta)$

Los otros axiomas y reglas quedan sin cambiar.

Es fácil demostrar que S2 contiene a P2: AP2.1 es TS1.21; el resultado de poner L como prefijo a AP2.1 (lo cual nos permite hacer RP1.1) se convierte, de acuerdo con Def $\dashv\!\supset$, en TS1.21a; y RP2.1, de acuerdo con Def $\dashv\!\supset$, es RB (pág.194).

Demostrar que P2 contiene a S2 es más complicado. Como primer paso demostramos que P2 contiene a P1. Para hacer esto tenemos, por supuesto, que derivar en P2 tanto AP1.1 como la regla de sustitución de equivalentes, RP1.2. Pero hay otro punto más que no debemos descuidar. RP1.1, aunque todavía está en nuestro poder, nos permite prefijar una *L sólo a los axiomas del sistema en que aparece*; y, puesto que AP1.1 no es un axioma de P2, RP1.1, no autoriza automáticamente a colocar una L delante de él en P2, como sí lo autoriza en P1. Por consiguiente, también tenemos que derivar la fórmula que consta de AP1.1 precedida de L, es decir (de acuerdo con Def $\dashv\!\supset$)

$$((p \dashv\!\supset q) \cdot (q \dashv\!\supset r)) \dashv\!\supset (p \dashv\!\supset r)$$

Una vez tengamos esto, por supuesto, AP1.1 se seguirá de acuerdo con AP1.2.

Volvemos ahora a estas derivaciones. En las pruebas que siguen utilizamos x AP2.1 para indicar el uso de la regla

$$\vdash L(\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha \supset L\beta)$$

que es inmediatamente derivable de AP2.1. Los dos primeros teoremas son pasos hacia las tesis antes mencionadas.

TP2.1 $(p \dashv q) \supset ((q \dashv r) \supset (p \dashv r))$

PRUEBA

CP x RP1.1:	(1)	$L[(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))]$
(1) x AP2.1:	(2)	$L(p \supset q) \supset L((q \supset r) \supset (p \supset r))$
AP2.1 $[q \supset r/p, p \supset r/q]$:	(3)	$L((q \supset r) \supset (p \supset r)) \supset (L(q \supset r) \supset (L((p \supset r))$
(2), (3) x Sil x Def $\dashv$:	(4)	$(p \dashv q) \supset ((q \dashv r) \supset (p \dashv r))$ **Q.E.D.**

TP2.1 nos proporciona la regla del Sil en la forma:

$$\vdash (\alpha \dashv \beta),\ \vdash (\beta \dashv \gamma) \rightarrow \vdash (\alpha \dashv \gamma)$$

Para distinguir esto del Sil para la implicación material le denominaremos *Sil'*.

TP2.2 $(p \dashv (q \supset r)) \supset ((p \cdot q) \dashv r)$

PRUEBA

CP x RP1.1:	(1)	$L[(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \cdot q) \supset r)]$
(1) x AP2.1:	(2)	$L(p \supset (q \supset r)) \supset L((p \cdot q) \supset r)$
(2) x Def $\dashv$:	(3)	$(p \dashv (q \supset r)) \supset ((p \cdot q) \dashv r)$ **Q.E.D.**

TP2.3 $((p \dashv q) \cdot (q \dashv r)) \dashv (p \dashv r)$

PRUEBA

CP x RP1.1:	(1)	$L[(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))]$
(1) x RP2.1:	(2)	$L[L(p \supset q) \supset L((q \supset r) \supset (p \supset r))]$
(2) x Def $\dashv$:	(3)	$(p \dashv q) \dashv L((q \supset r) \supset (p \supset r))$
AP2.1 x RP1.1:	(4)	$L[L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)]$
(4) $[q \supset r/p, p \supset r/q]$, x Def $\dashv$:	(5)	$L((q \supset r) \supset (p \supset r)) \dashv ((q \dashv r) \supset (p \dashv r))$
(3), (5) x Sil':	(6)	$(p \dashv q) \dashv ((q \dashv r) \supset (p \dashv r))$
(6), TP2.2 $[p \dashv q/p, q \dashv r/q, p \dashv r/r]$ x MP:	(7)	$((p \dashv q) \cdot (q \dashv r)) \dashv (p \dashv r)$ **Q.E.D.**

Tenemos que derivar ahora la regla de sustitución de equivalentes (RP1.2) en P2. Lemmon utiliza una versión de CP en la que los operadores primitivos son $\sim$ y $\supset$; así pues, todas las fórmulas de sus sistemas modales pueden escribirse con $\sim$, $\supset$ y L como únicos operadores. Por consiguiente, para establecer RP1.2 sólo hace falta que derivemos las reglas:

(a) $\vdash (\alpha = \beta) \rightarrow \vdash (\sim\alpha = \sim\beta)$

(b) $\vdash (\alpha = \beta) \rightarrow \vdash ((\alpha \supset \gamma) = (\beta \supset \gamma))$

(c) $\vdash (\alpha = \beta) \rightarrow \vdash ((\gamma \supset \alpha) = (\gamma \supset \beta))$

(d) $\vdash (\alpha = \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha = L\beta)$

y RP1.2 se seguirá de acuerdo con la inducción en la construcción de las fórmulas (y de acuerdo con la regla fácilmente establecida: $\vdash \alpha$, $\vdash (\alpha = \beta) \rightarrow \vdash \beta$).

TP2.4 $(p = q) \supset (\sim p = \sim q)$

PRUEBA

CP x RP1.1:	(1)	$L[(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)]$
(1) x AP2.1, x Def $\dashv$	(2)	$(p \dashv q) \supset (\sim q \dashv \sim p)$
(2) $[q/p, p/q]$:	(3)	$(q \dashv p) \supset (\sim p \dashv \sim q)$
CP:	(4)	$(p \supset q) \supset ((r \supset s) \supset ((p \cdot r) \supset (s \cdot q)))$
(2), (3) x (4):	(5)	$((p \dashv q) \cdot (q \dashv p)) \supset ((\sim p \dashv \sim q) \cdot (\sim q \dashv \sim p))$
(5) x Def =:	(6)	$(p = q) \supset (\sim p = \sim q)$ **Q.E.D.**

(al (2) acabado de mencionar, a saber, $(p \dashv q) \supset (\sim q \dashv \sim p)$ y a su regla asociada $\vdash (\alpha \dashv \beta) \rightarrow \vdash (\sim\beta \dashv \sim\alpha)$ les denominaremos **TP2.4a**).

TP2.5 $(p = q) \supset ((p \supset r) = (q \supset r))$
TP2.6 $(p = q) \supset ((r \supset p) = (r \supset q))$

Estos se prueban de modo semejante, pero comenzando a partir de

$$\vdash ((p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r)))$$

y

$$\vdash ((p \supset q) \supset ((r \supset p) \supset (r \supset q)))$$

respectivamente.

Evidentemente TP2.4-6 proporcionan inmediatamente las reglas (a)-(c). Para (d) tenemos: $\vdash (\alpha = \beta)$ proporciona, de acuerdo con Def = y CP, tanto $\vdash (\alpha \dashv \beta)$ como $\vdash (\beta \dashv \alpha)$; de aquí, de acuerdo con RP2.1 y Def $\dashv$, tanto $\vdash (L\alpha \dashv L\beta)$ como $\vdash (L\beta \dashv L\alpha)$. Adj y Def = proporcionan entonces $\vdash (L\alpha = L\beta)$.

Esto completa la prueba de que P2 contiene a P1. En particular, puesto que todos los axiomas de S1 están en P1, están en P2 también. Ahora demostramos que AS2.1, la cual proporciona S2 cuando se le añade S1, es un teorema de P2.

TP2.7 [AS2.1] $M(p \cdot q) \dashv Mp$

PRUEBA

CP x RP1.1	(1)	$L(\sim p \supset \sim (p \cdot q))$
(1) x RP2.1, x Def $\dashv$:	(2)	$L \sim p \dashv L \sim (p \cdot q)$
(2) x TP2.4a:	(3)	$\sim L \sim (p \cdot q) \dashv \sim L \sim p$
(3) x Def M:	(4)	$M(p \cdot q) \dashv Mp$ **Q.E.D.**

Hemos demostrado ahora que P2 contiene todos los axiomas de S2. Las reglas de transformación primitivas de S2 son sustitución uniforme, adjunción, separación estricta y sustitución de equivalentes estrictos. De éstas, la sustitución uniforme, es una regla primitiva de S2; hemos demostrado que la sustitución de equivalentes estrictos es válida en P2; y la adjunción y la separación estricta son válidas en P2 por las mismas razones que dimos en el caso de P1 en la pág. 206. Más aún, puesto que las equivalencias correspondientes a las definiciones S1 y S2 de L y $\dashv$ (a saber

TP1.1 y TP1.2) son teoremas de P1, son también teoremas de P2. Por tanto P2 contiene a S2.

Para obtener P3 sustituimos tanto AP2.1 como RP2.1 por:

AP3.1 $L(p \supset q) \supset L(Lp \supset Lq)$

(Es decir P3 tiene sólo AP1.2 y RP1.1 –y, desde luego, sustitución y separación– además de AP3.1).

Mostramos en primer lugar que P3 contiene a P2. Para hacer esto tenemos que derivar RP2.1 y $\vdash L(p \supset q) \dashv (Lp \supset Lq))$[239]. Evidentemente RP2.1 se sigue directamente de AP3.1. Para lo otro comenzamos por demostrar:

TP3.1 $(p \dashv q) \supset ((q \dashv r) \supset (p \dashv r))$

PRUEBA

AP1.2 $[Lp \supset Lq/p]$:	(1)	$L(Lp \supset Lq) \supset (Lp \supset Lq)$
AP3.1, (1) x Sil:	(2)	$L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$

Puesto que esta última fórmula, (2), es AP2.1 el resto de la prueba es como para TP2.1[240], que es la misma fórmula que TP3.1. De este modo tenemos la regla Sil′ en P3 así como en P2.

TP3.2 $L(p \supset q) \dashv (Lp \supset Lq)$

PRUEBA

AP3.1 x RP1.1, x Def $\dashv$:	(1)	$L(p \supset q) \dashv L(Lp \supset Lq)$
AP1.2 x RP1.1, x Def $\dashv$:	(2)	$Lp \dashv p$
(2) $[Lp \supset Lq/p]$:	(3)	$L(Lp \supset Lq) \dashv (Lp \supset Lq)$
(1), (3) x Sil′:	(4)	$L(p \supset q) \dashv (Lp \supset Lq)$ **Q.E.D.**

Así pues, P3 contiene a P2 y por consiguiente a S1 también. Ahora bien, S3 es S1 más AS3.1, o alternativamente (como mostramos en la pág. 195 S1 más TS3.1 –es decir $(p \dashv q) \dashv (Lp \dashv Lq)$; y esto es fácilmente derivable en P3 mediante la aplicación de RP1.1 y la Def $\dashv$ a AP3.1. Por tanto P3 contiene a S3.

La prueba de que S3 contiene a P3 es directa. AP1.2 es TS1.18. RP1.1, en tanto que se aplica a fórmulas CP, es N (S1). En tanto que se aplica a axiomas, será válido en S3 si podemos demostrar las formas estrictas de AP1.2 y AP3.1. La primera es TS1.18a; la última (de acuerdo con Def $\dashv$) es TS3.1.

P4 tiene los mismos axiomas que P3, pero en lugar de RP1.1 (es decir como única regla aparte de la sustitución y la separación) tenemos:

RP4.1 Si α es una fbf válida de CP o una tesis cualquiera de P4, entonces $\vdash L\alpha$[241].

---

239 Es dcir, la forma estricta de AP2.1 – por la razón dada en la pag. 207.

240 Pág. 208. La prueba dada allí no implica el aplicar RP1.1 a AP2.1, así que se puede seguir por completo en P3.

241 Lemmon da en realidad CP1 y la regla $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$; (op. cit. pág. 178) pero nuestra RP4.1, que produce el mismo efecto que estos combinados, está más de acuerdo con la regla RP1.1 que tuvimos en P1-P3.

Evidentemente P4 es P3 con la adición de la regla: $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$ –es decir, la regla no restringida de la necesariedad (N). Pero P3 es deductivamente equivalente a S3, y demostramos en la pág. 197 que la adición de esta regla a S3 proporciona un sistema que contiene a S4. Por tanto P4 contiene a S4.

Más aún S4 contiene a P4, ya que demostramos en la pág. 197 y s. tanto que S4 contiene a S3 (y por consiguiente a P3 que como N es válida en S4.

Los dos sistemas son por consiguiente deductivamente equivalentes[242].

Lemmon no continúa su serie de sistemas más allá de P4. Pero evidentemente podríamos formar un sistema P5, deductivamente equivalente a S5, mediante la adición a P4 de:

AP5.1 $Mp \supset LMp$

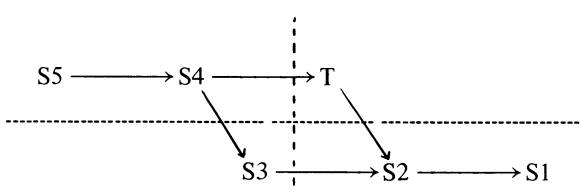
Si realizásemos esto podríamos entonces debilitar a AP3.1 convirtiéndolo en AP2.1, y entonces tendríamos la axiomatización S5 del capítulo 3 (con la diferencia del distinto modo de establecer la parte CP de la base).

Los sistemas Lewis y T

Ninguno de los sistemas Lewis S1–S5 es deductivamente equivalente a T.

Demostramos en la I Parte que T está contenido en, pero no contiene a, S4 (pág. 68). Más aún, no es difícil comprobar que T contiene a P2 y por consiguiente a S2; ya que la base de P2 (con excepción de RP2.1, que es una evidente regla de T en cualquier caso) es simplemente la de T con ciertas restricciones en la regla de necesariedad (N). S2,sin embargo, no contiene a T; ya que de acuerdo con N tenemos $\vdash_T LL(p \supset p)$, pero hemos demostrado que S2 no contiene ninguna tesis de la forma $LL\alpha$ (pág.197). Puesto que tampoco S3 posee ninguna tesis de esta forma, no puede contener a T. Pero aunque T contiene a S2 no contiene a S3; ya que T tiene la regla no restringida de la necesariedad, y como hemos demostrado en la pág.196, si esta regla fuese añadida a S3 obtendríamos S4, que como sabemos *no* está contenido en T. T y S3 son por consiguiente sistemas independientes; es decir no se contienen entre sí.

La relación existente entre S1–S5 y T puede representarse en el siguiente diagrama[243]:



A → B significa que todo teorema de B es también teorema de A (pero no *vice versa*). Los sistemas que aparecen por encima de la línea horizontal poseen la regla no restringida de la Necesariedad. Los que están a la izquierda de la línea vertical poseen solamente un número finito de modalidades distintas.

---

242 Para modos alternativos de obtener S4 (y también T) *vide* Åqvist [1964], págs. 79-81. Nuestra base S4 de la pág. 112 es de hecho la misma que la de P4.

243 Cf. Prior [1957], págs. 123-124.

CAPITULO XIV

OTROS SISTEMAS PROPOSICIONALES MODALES

Hasta el momento hemos limitado nuestra atención a los seis sistemas S1–S5 y T. Existen, sin embargo, muchos otros sistemas modales además de éstos –tantos, de hecho, que todo lo que podemos hacer aquí es un pequeño resumen de los principales e indicar las relaciones que guardan entre sí y con los sistemas ya discutidos.

Para hacer nuestro trabajo más manejable nos restringiremos de momento a sistemas de base L o M con todas las siguientes características[244]:

1. Las relaciones entre los operadores modales L, M, $\dashv\!\!\exists$ y $=$ son tales que los siguientes son teoremas:

   (a) $\sim L \sim p \equiv Mp$

   (b) $\sim M \sim p \equiv Lp$

   (c) $(p \dashv\!\!\exists\, q) \equiv L(p \supset q)$

   (d) $(p = q) \equiv ((p \dashv\!\!\exists\, q) \cdot (q \dashv\!\!\exists\, p))$

2. La regla de sustitución uniforme es válida (ya como primitiva, o, si se emplean los esquemas de axiomas, como derivable).
3. La regla de la separación material es válida.
4. Si α es una fbf válida de CP entonces $\vdash L\alpha$.
5. Los siguientes son teoremas:

   (a) $Lp \supset p$

   (b) $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$

6. $p \supset Lp$ no es un teorema.

Esta lista de condiciones no es ni arbitraria ni indebidamente restrictiva. Desde el punto de vista intuitivo, está basada en dos principios. Uno es que los sistemas que han de considerarse deben poder interpretarse como lógicas de la necesidad y la posibilidad en algún sentido suficientemente natural, el otro es que deben *incluir* un cálculo proposicional ortodoxo bivalente, tanto en el sentido de que toda fórmula CP válida será un teorema como también en el sentido de que toda proposición con la forma de una fórmula CP válida se considerará como una verdad necesaria.

Por lo que a la restriccionabilidad se refiere, diseñamos una lista un tanto semejante de condiciones en el Capítulo 2, y el sistema más débil que *las* satisfacía era T. T también satisface nuestra presente lista de condiciones, pero también lo hacen los sistemas más débiles S1 y S2, en los que ciertamente parece posible pensar en L y M

[244] Algunas de estas condiciones aparecen en Łukasiewicz [1953]. Ejemplos de sistemas que no satisfacen todas ellas se encontrarán en el Capítulo 16.

como operadores de necesidad y posibilidad. De hecho, el presente conjunto puede ser satisfecho por sistemas que son incluso más débiles que S1, como veremos en seguida. Por tanto, tal vez la lista del Capítulo 2, era indebidamente restrictiva; pero es por lo menos discutible el que un sistema que no cumpliese todo nuestro presente conjunto de condiciones implicaría un sentido de "necesidad" bastante forzado, o un abandono del CP normal, o ambas cosas. En cualquier caso, el que posean en común las características que hemos enumerado proporciona una cierta coherencia al grupo de distemas que vamos a estudiar.

El sistema SO.5

El sistema más débil que satisfaría todas las condiciones 1-6 sería uno equivalente al siguiente:

L se toma como primitivo, y los demás operadores modales se definen de modo que satisfagan la condición 1.

Los axiomas son:

LA1 $Lp \supset p$
LA2 $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$

Las reglas de transformación son: sustitución uniforme; separación material; y

CPL Si α es una fbf válida de CP, entonces $\vdash L\alpha$.

A este sistema lo denomina E. J. Lemmon SO.5[245].

LA1 y LA2 son los axiomas A5 y A6 del sistema T (pág. 37). Puesto que, de acuerdo con CPL y LA1, podemos derivar todas las tesis CP en S0.5 podemos considerar a S0.5 como a T pero con la regla de Necesariedad hecha tan débil como CPL. De hecho no solamente S0.5 es más débil que T, es incluso más débil que S1. Lemmon demuestra esto[246] mostrando que es más débil que un sistema que él denomina S0.9 y que demuestra que está contenido en S1 (y es posiblemente más débil que S1). S0.9 es el P2 de Lemmon pero con RP2.1 sustituido por la regla más débil: $\vdash (\alpha = \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha = L\beta)$.

Por lo que se refiere a la interpretación, Lemmon sugiere que el operador L de S0.5 sea considerado con el significado de "es tautológico mediante tablas de verdad que..."[247].

Sistemas con el axioma Brouweriano

En el Capítulo 3 nos referimos brevemente al *Sistema Brouweriano*[248] obtenido mediante la adición a T del axioma extra

B $p \supset LMp$

y vimos que este sistema es un intermedio entre T y S5 pero independiente de S4.

---

245 Lemmon [1957], pág. 181. S0.5 no debe confundirse con sistemas tales como el S.1 de Parry [1953] (*vide* también Hamblin [1959] que sólo considera fórmulas de primer grado. Puesto que tales sistemas (como observó Lemmon, *loc. cit.*) tienen que restringir o bien la clase de las fórmulas o la regla de la sustitución uniforme no se discutirán en este libro. Cf. Pollock [1967b].

246 Op. cit., pág. 181.

247 Lemmon [1959], pág. 31.

248 *Supra* pág. 59 y s. *Vide* también Kripke [1963a], y el sistema T^+ de Thomas [1964b].

Lewis, siguiendo a Becker, cita la forma estricta del axioma Brouweriano[249], a saber:

B′ $p \dashv LMp$

(Cuando añadimos el axioma Brouweriano a T, la presencia en T de la regla de Necesariedad hace indiferente el que usemos B′ o B; pero cuando lo añadimos a otros sistemas podrá dar resultados distintos según la forma que elijamos).

Demostramos que la adición a S1 de B′ también proporciona el sistema Brouweriano. La prueba es como sigue:

TS1.21a	(1)	$(p \dashv q) \dashv (Lp \supset Lq)$
B′, (1) $[LMp/q]$ x MP:	(2)	$Lp \supset LLMp$
(2) $[p \supset p/p]$:	(3)	$L(p \supset p) \supset LLM(p \supset p)$
CP x N(S1):	(4)	$L(p \supset p)$
(4), (3) x MP:	(5)	$LLM(p \supset p)$

Ahora bien (5) es de la forma $LL\alpha$ y por tanto cualquier extensión estricta de S1 en la que sea derivable contiene a T (*vide* pág. 190 y s.) [250]. Por tanto S1 + B′ = T + B[251]. Más aún, la prueba también muestra que S3 + B′ = S5[252]. Ya que a partir de B′ hemos derivado (usando tesis S1) una fórmula de la forma $LL\alpha$ y sabemos[253] que la adición de tal fórmula a S3 proporciona S4 y que la adición de B′ a S4 proporciona S5; por tanto S3 + B′ contiene a S5. Y lo inverso es válido, ya que ya hemos demostrado que S5 contiene a S3 y que B′ es un teorema de S5.

Aunque B′ no hace a S1 tan fuerte como S5, existe una fórmula íntimamente relacionada con ella que sí lo hace, a saber

B″ $p \dashv LLMp$

Para demostrar esto, observamos primero que B′ es un teorema de S1 + B″. Ya que mediante sustitución en $\vdash (Lp \dashv p)$ tenemos $\vdash (LLMp \dashv LMp)$; de donde, de acuerdo con B″ y Sil, obtenemos $\vdash (p \dashv LMp)$. Ahora bien, ya hemos demostrado que S1 + B′ contiene a $LLM(p \supset p)$ y, por tanto, que él y cualquier extensión estricta (en particular S1 + B″) contienen la regla no restringida de la Necesariedad y por ello la base axiomática completa de T. Por tanto, sólo hace falta que demostremos que T con la adición de B″ proporciona S5, y esto producirá el resultado que deseamos.

Trabajando con las formas materiales de tesis (que por supuesto son suficientes en T y son sistemas más fuertes, puesto que tenemos la regla de la Necesariedad)

---

249 Becker [1930] (pág. 509) utilizando $\sim$ para la imposibilidad tiene simplemente $p \dashv \sim\sim p$. (Becker, por supuesto, lo consideraba como una posible adición a S3). Lewis and Langford [1932] lo escriben como $p \dashv \sim \Diamond \sim \Diamond p$ (C12, pág. 497).

250 En este capítulo, a menos que se establezca otra cosa, S1-S3 se entienden tal como son axiomatizados por Lewis, aunque los resultados también valen para las axiomatizaciones de Lemmon.

251 *Vide supra* pág. 60. El resultado también se sigue de una observación de Sobociński [1962a] (pág. 59).

252 Parry [1939], págs. 150-152.

253 *Vide supra*, pág. 197 y Lewis and Langford [1932], pág. 498.

tenemos la siguiente prueba del axioma S5 característico:

B [$ML \sim p/p$]:	(1)	$ML \sim p \supset LMML \sim p$
(1) x Transp, x ILM	(2)	$MLLMp \supset LMp$
B″ (forma material) x RD3 (pág. 42):	(3)	$Mp \supset MLLMp$
(3), (2) x Sil:	(4)	$Mp \supset LMp$ **Q.E.D.**

Por tanto, la adición de B″ a S1 nos proporciona cuando menos S5. El que no nos proporciona más se sigue del hecho de que B″ es una tesis de S5. Esto es fácil de demostrar, puesto que ya sabemos que B′ está en S5; de donde de acuerdo con $\vdash (Lp \dashv\supset LLp)$ y Sil obtenemos B″.

B″ se obtuvo a partir de B′ sustituyendo la L por dos Ls. Si decidimos tener como tesis una fórmula obtenible sustituyendo la L de B′ por un número de Ls tenemos lo que Becker[254] denomina un axioma Brouweriano "generalizado", que puede escribirse como:

$$p \dashv\supset L_n Mp$$

en el que L_n representa una secuencia de Ls consecutivas y n es un número natural mayor que 1.

Ahora bien, evidentemente, para $n > 1$, $\vdash_{S1} L_n Mp \dashv\supset LLMp$; y por tanto la adición de cualquier axioma Brouweriano generalizado a S1 producirá, de acuerdo con Sil, $\vdash p \dashv\supset LLMp$ (B″) y de esto modo proporcionará S5. Más aún, todo axioma Brouweriano generalizado está él mismo en S5, ya que el argumento anterior para mostrar que B″ está en S5 puede extenderse y que comprenda cualquier número de Ls. Por tanto, la adición de cualquier axioma Brouweriano generalizado a S1 proporciona un sistema deductivamente equivalente a S5[255].

Sistemas con axiomas S4 generalizados

Tratamos ahora una serie de sistemas más fuertes que T pero más débiles que S4. En esta sección consideraremos a S4 axiomatizado mediante la adición de $\vdash (Lp \supset LLp)$ a T.

Evidentemente, si tenemos, como en S4, $\vdash (Lp \supset LLp)$, también tenemos, mediante sustitución, $\vdash (LLp \supset LLLp)$, $\vdash (LLLp \supset LLLLp)$, y en general, cuando L_n es una secuencia de n Ls consecutivas, $\vdash (L_n p \supset L_{n+1} p)$. Pero no podemos operar en la dirección inversa: si, por ejemplo nuestra única adición a T es $\vdash (LLp \supset LLLp)$, no podemos derivar $\vdash (Lp \supset LLp)$.

Podemos establecer este resultado más generalmente. Sea S un sistema formado mediante la adición de $\vdash (L_n p \supset L_{n+1} p)$ a T. Entonces si $m \geqslant n$, $\vdash_S (L_m p \supset L_{m+1} p)$. Pero si $m < n$, $(L_m p \supset L_{m+1} p)$ no es una tesis de S.

La primera mitad de este resultado se sigue inmediatamente de la regla de la sustitución uniforme, como ya hemos señalado en el caso de S4. La segunda mi-

---

254 Becker [1930], pág. 524.

255 Churchman [1938] ha demostrado que el añadir axiomas Brouwerianos generalizados a S2 proporciona S5. Sobociński [1962c] ha demostrado la misma conclusión para un determinado sub-sistema propio de S1. Para los sistemas que no tengan el teorema $Lp \dashv\supset p$, sin embargo, según qué axiomas generalizados Brouwerianos añadamos así obtendremos unos resultados u otros. *Vide* Sobociński [1962c]; Thomas [1963a], [1963c] y [1964b].

tad puede demostrarse a partir de una consideración de modelos del tipo explicado en el Capítulo 4[256].

Lo que aquí se concluye es que tenemos una serie infinita de sistemas no equivalentes entre T y S4, obtenido cada uno de ellos añadiendo a T un axioma de la forma $L_n p \supset L_{n+1} p$. A estos sistemas los denominamos sistemas $S4_n$[257].

Cualquier sistema $S4_n$ particular tendrá exactamente n Ls en el antecedente de su axioma característico. (Así pues, $S4_1$ es simplemente S4). Cada sistema $S4_n$ ($n > 1$) es más fuerte que T pero más débil que S4; y cuando mayor sea n más débil es el sistema $S4_n$.

Una característica de los sistemas $S4_n$ es que mientras que, como vimos en el capítulo 3 (pág. 51 y s.), cuando $n=1$ (es decir en S4) el número de modalidades no equivalentes es finito, cuando $n > 1$ existe un número infinito de modalidades no equivalentes en $S4_n$. Por ejemplo se ha demostrado[258] que en $S4_2$ no hay modalidades equivalentes en la secuencia:

$$Lp; MLp; LMLp; MLMLp; \text{etc.}$$

Cada sistema $S4_n$ puede combinarse con el axioma Brouweriano para producir una serie de sistemas S4 + B. Thomas[259] da el nombre de T_n^+ a estos sistemas y demuestra que cada T_n^+ es independiente de T_{n+1}^+.

Sistemas entre S4 y S5

Un número considerable de sistemas que contienen a S4 han sido propuestos. De éstos algunos están contenidos en S5, pero otros no lo están. En la presente sección nos ocuparemos únicamente de los del primer tipo; consideraremos los restantes posteriormente.

Cada uno de estos sistemas se forma añadiendo un axioma o varios axiomas extra a S4. Por razones de conveniencia supondremos que S4 ha sido axiomatizado (como en el capítulo 3) con $\vdash \alpha \rightarrow L\alpha$ como regla primitiva. Será suficiente entonces añadir los nuevos axiomas en una forma que tenga una implicación material (o disyunción) como operador principal[260].

Dummet y Lemmon[261] atribuyen a P. T. Geach la investigación de un sistema que ellos denominan S4.2, cuyo axioma propio es:

G1[262] $MLp \supset LMp$

Demuestran que S4.2 tiene por lo menos diez modalidades no equivalentes, las

---

256 Este resultado también se cita en Thomas [1964a] como un resultado sin publicar de Sobociński.

257 Siguiendo a Feys [1965], pág. 127.

258 Sugihara [1964].

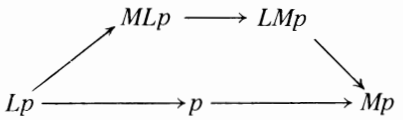
259 Thomas [1964a].

260 Esto podría no ser suficiente si S4 se axiomatizase de otra manera. Una versión de S4 en la que la regla de la Necesariedad no sea primitiva tendrá que contener la regla derivada de que siempre que $\vdash_{S4} \alpha$ $\vdash_{S4} L\alpha$; pero esto no nos garantizaría el que una regla no restringida de la Necesariedad seguiría siendo válida si añadiésemos nuevos axiomas. Es por esta razón por lo que algunos autores, trabajando con otras axiomatizaciones de S4, han añadido sus nuevos axiomas en forma estricta (es decir precedidos de L o con $-\Diamond$ en lugar de $\supset$ como operador principal). Esto aplica también a muchos de los axiomas enumerados más adelante.

261 Dummet and Lemmon [1959], pág. 252.

262 Las numeraciones de esta Sección son las que aparecen en Sobociński [1964b], donde se considera una serie de sistemas relacionados con S4.2 y S4.3. En Parry [1939], pág. 152,

indicadas en el siguiente diagrama y sus negaciones (Las flechas representan implicaciones).



S4.2 está contenido en S5, ya que en S5 tenemos $\vdash (MLp \supset Lp)$, $\vdash (Lp \supset Mp)$ y $\vdash (Mp \supset LMp)$, de donde mediante Sil obtenemos G1.

Los mismos autores también consideran un sistema S4.3 con el axioma propio:

D2 $L(Lp \supset Lq) \vee L(Lq \supset Lp)$

Ellos demuestran[263] que S4.3 contiene a S4.2.

S4.3 y otro sistema, D, que mencionaremos en seguida ofrecen un interés especial en relación con un aspecto aludido por A. N. Prior en *Time and Modality*[264]. Prior consideraba a las proposiciones como objetos que podían cambiar sus valores de verdad (que se podían *convertir* en verdaderas o se podían *convertir* en falsas) con el paso del tiempo, y deseaba poder interpretar *Lp* con el significado de "Es y siempre será el caso que *p*". Por tanto, sugería que considerásemos al tiempo como una serie de momentos, en cada uno de los cuales una determinada proposición podría tener el valor 1 (verdadera) o el valor 0 (falsa), sin predeterminar su valor en cualquier otro momento; y él definió el valor de *Lp* en cualquier momento dado como 1 si *p* tiene el valor 1 en ese momento y en todos los momentos siguientes, y de lo contrario como 0. Puede decirse entonces que una fórmula es válida SI tiene el valor 1 en todos los momentos con independencia de los valores asignados a sus variables en cualquier momento.

El problema es encontrar un sistema axiomático cuyos teoremas coincidan con las fórmulas que son válidas de acuerdo con este criterio. En *Time and Modality* Prior conjeturaba[265] que S4 era el sistema requerido, pero se descubrió que esto era incorrecto y Prior abandonó esa posición poco después[266]. El problema se complica más por el hecho de que el criterio de validez puede tomarse en dos sentidos según que el tiempo se considere como discontinuo (discrete) o continuo. Considerar al tiempo como discontinuo es pensar que consta de una serie de momentos distintos, de tal modo que dado un momento podemos hablar del momento siguiente, el otro siguiente, y así sucesivamente. Considerar al tiempo como continuo es suponer que entre dos momentos cualesquiera existe un tercero, y no tiene sentido hablar del momento siguiente a uno determinado. Esta distinción es importante aquí ya que de ella resulta que existen fórmulas que no son válidas

---

encontramos $MLp = LMp$ (su C16) que es G1 hecho más fuerte en una equivalencia estricta. Pero puesto que esto proporciona $LMp \supset MLp$, que es nuestro Kb, el sistema del que es axioma propio no está contenido en S5 (*vide infra* nota 271).

263 Op. cit., pág. 252. Más resultados relativos a S4.2 y S4.3 y sus ampliaciones pueden encontrarse en Bull [1964a], [1965c] y [1966a]. Al igual que muchos resultados de esta sección se obtienen utilizando el Algebra Booleana (Para la discusión del estudio algebraico de los sistemas modales *vide* Capítulo 17).

264 Prior [1957], Capítulo II. Para una introducción posterior y más completa de toda la cuestión de la interpretación temporal de las lógicas modales *vide* Prior [1967].

265 Prior [1957], pág. 23. *Vide* también Prior [1955b].

266 Prior [1958].

cuando el tiempo se toma como continuo, pero que son válidas cuando el tiempo se toma como discontinuo. De este modo se precisan dos sistemas, uno más débil para la interpretación del tiempo como continuo y uno más fuerte (D) para la interpretación del tiempo como discontinuo.

Dummett y Lemmon demuestran[267] que el sistema más fuerte (D) contiene a S4.3 y también a la fórmula siguiente (que no está en S4.3)

M1 $((p \dashv\vdash Lp) \dashv\vdash Lp) \supset (MLp \supset Lp)$

Se ha demostrado por tanto que S4.3 es precisamente el sistema más débil requerido (cuando el tiempo se toma como continuo) y que el sistema más fuerte D (para el tiempo considerado como discontinuo) es precisamente S4.3 + M1[268]:

M1 puede, de hecho, ser sustituido en la base de D por la fórmula más corta[269]:

N1 $((p \dashv\vdash Lp) \dashv\vdash p) \supset (MLp \dashv\vdash p)$

Más aún, Sobociński ha demostrado que la adición a S4 de

R1 $p \supset (MLp \supset Lp)$

produce un sistema que contiene, pero no está contenido en, D, y al que denomina S4.4[270].

En una interpretación temporal R1 significaría que si cualquier proposición que es ahora verdadera va a ser siempre verdadera de ese momento en adelante, entonces esa proposición será siempre verdadera a partir del momento presente. Es difícil sostener que esto tenga plausibilidad intuitiva (excepto quizá cuando se restrinja a cierto tipo especial de proposiciones), pero desde luego S4.4 es más fuerte que D y R1 no es un teorema de D.

Hemos estado considerando a M1 (o N1) como añadido a S4.3 (para producir D), pero por supuesto podríamos añadirlo también a los sistemas más débiles S4 o S4.2. Podemos por tanto establecer la siguiente serie de sistemas:

S4.4:	S4 + R1
S4.3.1 (D):	S4.3 + N1
S4.3:	S4 + D2
S4.2.1:	S4.2 + N1
S4.2:	S4 + G1
S4.1.1:	S4 + M1
S4.1[271]:	S4 + N1

---

267 Dummet and Lemmon [1959], pág. 264.

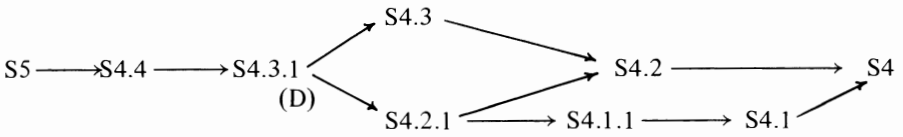
268 Bull [1965a]. El resultado para D se atribuye allí a Kripke. Para una relación histórica de estos desarrollos *vide* Prior [1967], págs. 20-31. Una base alternativa para D es S4.3+ $MLp \supset (((p \dashv\vdash Lp) \dashv\vdash Lp) \dashv\vdash Lp)$. (Esta última fórmula es una evidente variante de una proporcionada por Bull (op. cit., pág. 58)).

269 Prior [1967] (pág. 29) atribuye esta reducción, y también (pág. 27) una reducción análoga de D2 a $(Lp \dashv\vdash q) \vee (Lq \dashv\vdash p)$, a P.T. Geach.

270 Sobociński [1964b], donde D (axiomatizado con N1) se denomina S4.3.1.

271 Este sistema no es el mismo que el denominado S4.1 en McKinsey [1945], pág. 92. Seguimos a Sobociński al contravenir el tratamiento histórico aquí, basándonos en que el S4.1 de McKinsey (al que daremos el nombre de Sobociński, K1-*vide* pág. 220) no está contenido en S5 y por tanto no puede ser, como su nombre sugeriría, un sub-sistema propio de S4.2.

Sobociński demuestra que estos sistemas se relacionan como se indica en el siguiente diagrama[272]. Las flechas indican que el sistema de la izquierda contiene al sistema de la derecha.



Otra extensión de S4 es el sistema S4.5 de Parry[273] obtenido añadiendo el axioma

$$LMLp \supset Lp$$

Este sistema, sin embargo, es equivalente a S5[274].

Sistemas entre S3 y S5

También podemos ampliar S3 para obtener sistemas que están contenidos en S5. De éstos algunos también están contenidos en S4, pero otros no están.

Dos axiomas que podrían añadirse a S3 son:

$$M(Lp \dashv LLp)^{275}$$

y

$$LMMp \dashv LMp^{276}$$

Cada uno de los sistemas obtenidos de ese modo está contenido en S4.

Un sistema contenido en S5 pero no en S4 resulta de añadir a S3:

$$LMLp \dashv Lp^{277}$$

Otra extensión de S3 que no está contenida en S4 tiene como axioma suyo propio:

$$\sim Lp \supset L \sim Lp$$

(o la evidente alternativa, $Mp \supset LMp$). Åqvist denomina a este sistema S3.5 y tendremos más que decir sobre él posteriormente[278]. Aquí simplemente llamamos la atención sobre el hecho de que la forma estricta de este axioma es el axioma propio de S5, y su adicion a S3 en esa forma produciría, por supuesto, S5. En su forma material, sin embargo, da como resultado, cuando se añade a S3, un sistema más débil que S5.

Extensiones de S4 no contenidas en S5

Todos los sistemas con los que hemos tratado hasta ahora han estado contenidos en S5, pero algunas adiciones a S4 dan como resultado sistemas que no lo están, y

---

272 Sobociński [1964b], pág. 307. También considera un sistema VI que no está contenido en S5.

273 Parry [1939], pág. 150.

274 Para una prueba *vide* Feys [1965], págs. 130-131. Este resultado también fue obtenido por Dummett and Lemmon [1959], pág. 251, y por Sobociński [1964a] pág. 74.

275 Halldén [1949a], pág. 233.

276 Feys [1965], pág. 128 y Parry [1939], pág. 149.

277 Feys [1965], págs. 128-129.

278 Åqvist [1964], pág. 79. También *vide infra*, pág. 225.

nos dedicamos ahora a ellos. Estos no son, sin embargo, *más fuertes* que S5; más bien son independientes de él, en el sentido de que poseen teoremas que no están en S5 pero carecen de algunos de los que están[279].

Sobociński demuestra[280] que la adición a S4 de cualquiera de los siguientes axiomas producirá el mismo sistema, al que él denomina K1:

Ka $(LMp \cdot LMq) \supset M(p \cdot q)$[281]

Kb $LMp \supset MLp$

Kc $LM(Mp \supset Lp)$

Kd $LML(p \supset Lp)$

Ke $LML(Mp \supset p)$

Otros axiomas que considera son dos que ya hemos mencionado previamente (págs. 216-217), a saber

G1 $MLp \supset LMp$

D2 $L(Lp \supset Lq) \vee L(Lq \supset Lp)$

así como dos más:

H1 $p \supset L(Mp \supset p)$

J1 $((p \dashv L p) \dashv p) \supset p$

Añadiendo éstos, o varias combinaciones de ellos a S4 o a una de las extensiones de S4 ya mencionadas, produce los siguientes sistemas:

K2:	K1 + G1[282]
K3:	K2 + D2
K1.1:	S4 + J1
K1.2:	S4 + H1
K2.1:	S4.1 + J1
K3.1:	S4.3 + J1
K4:	S4.4 + K2

Demuestra este autor[283] que los sistemas K se relacionan entre sí y están también relacionados con algunos de los sistemas previamente mencionados en la forma que se ilustra en el siguiente diagrama:

---

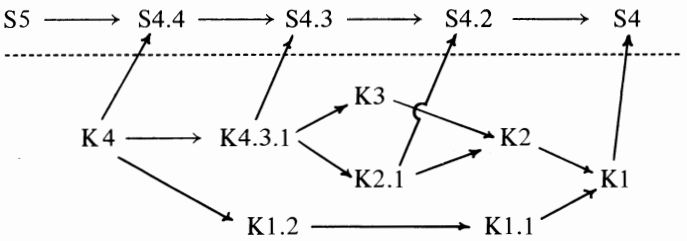
279 Sobociński [1964c] denomina a estos sistemas "sistemas no Lewis" (non-Lewis systems).

280 Sobociński [1964a] pág. 77. Nuestros Ka-Ke son sus K1-K5. Hemos hecho este cambio para evitar cualquier confusión con los nombres de los *sistemas*.

281 Este es el axioma añadido por McKinsey [1945], pág. 92, a S4 para obtener el sistema que él denomina S4.1, que es por tanto el K1 de Sobociński.

282 Sobociński [1964a], pág. 78. Si tomamos el axioma propio de K1 en la forma Kb ($LMp \supset MLp$), entonces K2 es S4+ ($LMp \equiv MLp$). K2 es el sistema mencionado en Parry [1939] pág. 152 (*vide supra* nota 262). Sobociński muestra que es equivalente al sistema S3 ($LMp = MLp$). Prior [1964b] muestra que K1 está contenido en, pero es más débil que, K2.

283 Sobociński [1964c], pág. 317 y [1964b], pág. 307.



Los sistemas K ni contienen a, ni están contenidos en, S5 y de hecho la adición de cualquiera de ellos a S5 haría que degenerase en CP en el sentido explicado en las págs. 60-61.

Mencionamos de pasada la existencia de fórmulas que cuando se añaden a otros varios cálculos modales degeneran de modo semejante en CP. Mencionamos las siguientes[284]:

$p \dashv Lp, Mp \dashv p$ y $LMp = Lp$ harían degenerar a S1 en CP

$LMp \dashv p$ (y por tanto $LMp \dashv Lp$) harían degenerar a S2 en CP.

Sistemas no regulares

Todos los sistemas que hemos considerado hasta ahora, sin excepción, han presentado esta característica, el que las transforms-CP de todas sus tesis son fórmulas CP válidas. Por la "transform-CP de una fórmula" significamos la fórmula que resulta de (a) eliminar todas las apariciones de $\dashv$ y $=$ mediante definiciones de equivacias y luego (b) suprimir todas las apariciones de L y M[285]. Los sistemas que poseían esta característica han sido denominados ***regulares***[286]. El establecer que un sistema es regular, por supuesto constituye una prueba de consistencia para ese sistema (*vide* pág. 45 y s.).

En esta sección consideramos unos cuantos sistemas que no son regulares en este sentido.

Observábamos en el capítulo anterior (pág. 211) que ninguno de los sistemas de Lewis S1–S3 tiene tesis de la forma $LL\alpha$, y que la adición a ellos de una tesis de esa forma conduce a T o a S4. Pero aunque ninguna fórmula de la forma $LL\alpha$ es tesis de estos sistemas, no se da el caso de que la negación de cada una de tales fórmulas *sea* una tesis. Ha sido sugerido, sin embargo, que podríamos fortalecer los sistemas de modo que se diese ese caso. La manera más sencilla de hacerlo sería añadir un axioma que Lewis numera como C13[287]:

C13 MMp

–ya que entonces si deseamos derivar cualquier fórmula de la forma $\sim LL\alpha$, sólo tenemos que sustituir $\sim\alpha$ por p en C13 y aplicar ILM.

Lewis señala[288] que C13 es independiente de cada sistema S1–S5, e incompati-

---

284 Cf. Feys [1965], págs. 131-132.

285 O, de modo equivalente, sustituyendo $\dashv$ por $\supset$ y $=$ por $\equiv$ en todas partes y suprimiendo todas las apariciones de L y M.

286 Sobociński [1962b].

287 Lewis and Langford [1932], pág. 497.

288 *Ibid.*, págs. 498-501. C13 es también incompatible con T.

ble con S4 y S5, pero no desarrolla ningún sistema que lo contenga. Sin embargo, como hemos señalado, y como Lewis implícitamente reconoce, podría añadirse consistentemente a S1, S2 o S3; produciría, ciertamente, un sistema no regular, ya que la supresión de sus operadores modales nos deja simplemente con p.

Un motivo que nos podría llevar a añadir C13 es el deseo de anular una inquietante característica de S1–S3 tal como aparecen. Halldén ha señalado[289] que cada uno de estos sistemas contiene tesis de la forma $(\alpha \vee \beta)$ que son tales que (i) ni α ni β son ellas mismas tesis y (ii) α y β no tienen ninguna variable común. Ahora bien, desde luego resultaría extraño tener a $(\alpha \vee \beta)$ *válida* cuando ni α ni β son válidas y no tienen ninguna variable común; ya que de acuerdo con los criterios normales de validez esto significaría que (a) podríamos hacer una asignación de valores a las variables de α que la hiciera falsa, (b) esto no nos obligaría a ninguna asignación particular de valores a las variables de β, (c) podríamos hacer una asignación que hiciese falsa a β, y sin embargo (d) no podríamos hacer falsa a α y β al mismo tiempo (que es lo que tendríamos que hacer para hacer falso $(\alpha \vee \beta)$). Esto parece cuando menos paradójico. De hecho podríamos, siguiendo a Halldén[290], definir una interpretación *normal* de un sistema como aquélla en la que si cualquier fórmula $(\alpha \vee \beta)$ es válida y α y β no tienen ninguna variable común, entonces o bien α es válida o bien β es válida. Se sigue de todo esto que para una interpretación normal cualquiera si todo teorema de S1–S3 es válido entonces estos sistemas son incompletos. La incompletitud (incompleteness) se origina de este modo: en el caso de fórmulas del tipo que hemos mencionado tenemos $\vdash(\alpha \vee \beta)$; por tanto $(\alpha \vee \beta)$ es válida; por tanto (de acuerdo con la interpretación normal) o α es válida o β es válida; pero ni $\vdash \alpha$ ni $\vdash \beta$; por consiguiente alguna fórmula válida no es una tesis.

Un ejemplo[291] es:

$$(1)\quad MM(p \cdot \sim p) \vee LL(q \supset q)$$

Podemos demostrar esto incluso en S1 como sigue:

$\sim p \vee p\ [LL(p \supset p)/p]$:	(a)	$\sim LL(p \supset p) \vee LL(p \supset p)$
CP x N(S1):	(b)	$(p \supset p) = (q \supset q)$
(a), (b) x Eq:	(c)	$\sim LL(p \supset p) \vee LL(q \supset q)$
(c) x Def $\supset$, x ILM:	(d)	$MM(p \cdot \sim p) \vee LL(q \supset q)$ **Q.E.D.**

Ninguno de los disyuntos de (1), sin embargo, es una tesis ni siquiera de S3: El primero porque S3 es regular y por tanto no puede tener ninguna tesis cuya transform-CP sea $p \cdot \sim p$; el segundo porque S3 no tiene ninguna tesis de la forma $LL\alpha$.

Si no estamos satisfechos con esta situación existen dos evidentes salidas. Una es abandonar S1–S3 en favor de T o algún sistema más fuerte; ya que $LL(q \supset q)$ –el segundo disyunto de (1)– es una tesis fácilmente derivada de T, y por tanto no se originará la paradoja en T[292]. La otra es ampliar S1, S2 o S3 añadiendo *MMp* (C13) como axioma, ya que entonces $MM(p \cdot \sim p)$ –el primer disyunto de (1)– será una tesis y una vez más no se originará la paradoja.

---

289 Halldén [1951].

290 *Ibid.*, pág. 127, aunque nuestra explicación difiere ligeramente de la suya. Halldén afirma que las propias interpretaciones de Lewis de sus cálculos son normales.

291 El ejemplo propio de Halldén es $\sim (M(p \cdot \sim p) \dashv (p \cdot \sim p)) \vee (M(q \cdot \sim q) \dashv (q \cdot \sim q))$.

292 Cf. McKinsey [1953].

En cualquier caso tenemos ahora un motivo plausible para añadir C13 a los sistemas de Lewis con los que sea compatible. El sistema S2 + C13 ha sido denominado S6[293] y S3 + C13, S7[294]. S3 + *LMMp* se conoce como S8.

Existe un interés especial respecto a las relaciones entre S3, S7 y S4. Formamos S7 añadiendo C13 (que aquí es conveniente considerar como *MMq*) a S3; y un modo por lo menos de obtener S4 es añadiendo AS4.1 ($Lp \dashv\vdash LLp$) a S3. Ahora bien, C13 y AS4.1 representan lo que Lewis denomina "presupuestos contrarios" (contrary assumptions)[295]. C13, como ya hemos observado, equivale a la afirmación de que ninguna proposición es necesariamente necesaria. AS4.1, sin embargo, nos lleva a afirmar que algunas proposiciones *son* necesariamente necesarias; ya que afirma que todas las proposiciones necesarias son necesariamente necesarias y en cualquier sistema que contenga a AS4.1 debe haber cuando menos alguna proposición necesaria. Así pues, evidentemente, no podemos añadir a la vez C13 y AS4.1 a S3, aunque podríamos añadir cualquiera de los dos.

S3 es entonces neutral respecto a dos puntos de vista conflictivos: (a) el que se refleja en S7, de que ninguna proposición es necesariamente necesaria (o de que toda proposición es posiblemente posible) y (b) el que se refleja en S4, de que si una proposición es necesaria, es necesariamente necesaria. Pero aunque S3 no nos obliga a sostener ninguno de estos puntos de vista sí nos obliga a sostener que uno de ellos es correcto; ya que en S3, (aunque no en sistemas más débiles) tenemos el siguiente teorema, que es una simple consecuencia de TS3.7 (pág.196);

TS3.8 $MMq \vee (Lp \dashv\vdash LLp)$

Lo que esto viene a significar es que S3 requiere que o el punto de vista (a) o el punto de vista (b) sean correctos, pero no nos dice cuál es correcto. (Y no tiene por qué perjudicarnos en absoluto esta omisión ya que podemos muy bien estar dudando entre (a) y (b) y desear una lógica que diga: "Las siguientes son verdades acerca de la necesidad lógica *sea cual sea* de estos dos puntos de vista el correcto")[296].

Todo esto sugiere que los teoremas de S3 son las fórmulas que son válidas con independencia de cual de estos dos puntos de vista tomemos. Y, de hecho, podemos demostrar que los teoremas de S3 son precisamente aquellas fórmulas que son teoremas tanto de S7 como de S4; es decir, que $\vdash_{S3} \alpha$ si tanto $\vdash_{S7} \alpha$ como $\vdash_{S4} \alpha$[297] Es evidente, por supuesto, que puesto que S7 y S4 son ambos más fuertes que S3, si $\vdash_{S3} \alpha$ entonces $\vdash_{S7} \alpha$ y $\vdash_{S4} \alpha$; lo que hace falta demostrar es lo inverso, y lo hacemos del modo siguiente:

---

293 Alban [1943], pág. 25. En S2 tenemos $MM(p \,.\, \sim p) \dashv\vdash MMp$, y así pues $MM(p \,.\, \sim p)$ serviría igualmente bien como axioma especial de S6.

294 Halldén [1949a], pág. 230. Las matrices del Grupo I de Lewis ([1932], pág. 498) (*vide* pág.185 *supra*) pueden utilizarse para mostrar la consistencia de estos sistemas.

295 Lewis and Langford [1932], pág. 499.

296 El hecho de que TS3.8 sea una tesis de S3 explica en parte la paradoja de Hallden mencionada anteriormente, al menos en lo que a ese sistema se refiere. Hemos ilustrado la dificultad señalando que $MM(p \,.\, \sim p) \vee LL(q \supset q)$ es una tesis y sin embargo consta de dos no tesis (non-theses) con ninguna variable en común. Podemos ver ahora que si es correcto el punto de vista (a) $MM(p \,.\, \sim p)$ es válido, mientras que si es correcto el punto de vista (b), $LL(q \supset q)$ es válido; por tanto no es sorprendente que en S3, en donde hemos de decidir que uno u otro de estos puntos de vista es correcto, la disyunción sea una tesis.

297 Este resultado se debe a Halldén [1949a], quien lo deriva sin embargo en una forma ligeramente más general.

Trabajaremos con una axiomatización de S3 (tal como la de Simons[298]) en la cual la sustitución uniforme y la separación material son las únicas reglas de transformación primitivas. Vimos en la pág. 197 que la adición a S3 de cualquier axioma de la forma $LL\ \alpha$ produce un sistema cuando menos tan fuerte como S4; y si elegimos como axioma extra una fórmula que esté en S4 en cualquier caso (tal como $LL\ (p \supset p)$), obtenemos exactamente S4. Podemos por consiguiente considerar a S4 como S3 + $LL\ (p \supset p)$ y esto resultará ser más conveniente aquí que nuestras anteriores axiomatizaciones. S7 es por supuesto S3 + MM_p.

Primero demostramos dos lemas

LEMA I

Si $\vdash_{S7} \alpha$ entonces $\vdash_{S3} \sim LL\ (p \supset p) \supset \alpha$

PRUEBA

Las siguientes son tesis de S3 fácilmente demostrables[299];

A. $\sim LL\ (p \supset p) \supset MMp$

B. $\sim LL\ (p \supset p) \supset \sim LL\ (q \supset q)$

La prueba sigue ahora mediante inducción sobre el método de probar teoremas en S7.

1. Si α es un axioma S3 entonces de acuerdo con $p \supset (q \supset p)$ tenemos $\vdash_{S3} \sim LL\ (p \supset p) \supset \alpha$.

2. Si α es el axioma propio de S7 *MMp* entonces $\sim LL\ (p \supset p) \supset \alpha$ es simplemente A y por consiguiente un teorema de S3.

3. Para Modus Ponens: Si α se obtiene de dos fbfs ya demostradas β y $\beta \supset \alpha$ entonces de acuerdo con la hipótesis de inducción $\vdash_{S3} \sim LL\ (p \supset p) \supset \beta$ y $\vdash_{S3} \sim LL\ (p \supset p) \supset (\beta \supset \alpha)$; de donde de acuerdo con los teoremas habituales de CP $\vdash_{S3} \sim LL\ (p \supset p) \supset \alpha$.

1. Para sustitución uniforme: Supóngase que α se obtiene mediante sustitución de una fbf, β, por alguna variable proposicional en un teorema S7, γ. Mediante la hipótesis de inducción, $\vdash_{S3} \sim LL\ (p \supset p) \supset \gamma$. Ahora bien (i), si la variable para la que se hace la sustitución es cualquier otra variable que no sea p, la misma sustitución en $\sim LL\ (p \supset p) \supset \gamma$ proporcionará $\vdash_{S3} \sim LL\ (p \supset p) \supset \alpha$. Y (ii) si se hace la sustitución para p, la misma sustitución en $\sim LL\ (p \supset p) \supset \gamma$ proporcionará $\vdash_{S3} \sim LL\ (\beta \supset \beta) \supset \alpha$; pero mediante B tenemos $\vdash_{S3} \sim LL\ (p \supset p) \supset \sim LL\ (\beta \supset \beta)$; por tanto mediante Sil tenemos $\vdash_{S3} \sim LL\ (p \supset p) \supset \alpha$ en este caso también.

Por consiguiente el lema es válido para todas las tesis de S7.

LEMA II

Si $\vdash_{S4} \alpha$, entonces $\vdash_{S3} LL\ (p \supset p) \supset \alpha$.

La prueba es exactamente paralela excepto que en lugar de A y B usamos respectivamente:

C. $LL\ (p \supset p) \supset LL\ (p \supset p)$

D. $LL\ (p \supset p) \supset LL\ (q \supset q)$

A partir de estos dos lemas tenemos el resultado de que si $\vdash_{S7} \alpha$ y $\vdash_{S4} \alpha$ entonces $\vdash_{S3} \sim LL\ (p \supset p) \supset \alpha$ y $\vdash_{S3} LL\ (p \supset p) \supset \alpha$. Por tanto, de acuerdo con $(\sim p \supset q) \supset ((p \supset q) \supset q)$ tenemos $\vdash_{S3} \alpha$. **Q.E.D.**

---

298 Simons [1953] y *vide supra* pág. 187.

299 En realidad A es una tesis de S2 y B de S1.

Vale la pena mencionar aquí otros dos resultados relacionados con éste aunque no demostraremos ninguno de ellos.

1. Mencionamos en la pág. 219 un sistema obtenido añadiendo a S3 el axioma $M(Lp \dashv LLp)$. Denominaremos a ese sistema S3.1. Halldén demuestra[300] que α es una tesis de S3 SI es una tesis tanto de S8 como de S3.1.

2. En la misma sección (pág. 219) también nos referimos al sistema S3.5 de Åqvist, que es S3 + $Mp \supset LMp$; y señalábamos que es más débil que S5 pero que la adición de la regla de la necesariedad lo fortalecería convirtiéndolo en S5. Åqvist también forma un sistema al que denominaremos S9[301] añadiendo MMp a S3.5 y demuestra que este sistema es consistente. S9 y S5 están relacionados con S3.5 del mismo modo que S7 y S4 están relacionados con S3; es decir α es una tesis de S3.5 SI es tesis a la vez de S5 y S9.

Podríamos sentirnos inclinados ahora a hacer una conjetura semejante acerca de S6, T y S2; es decir, podríamos conjeturar que α es una tesis de S2 SI es una tesis tanto de S6 como de T. Esto no es así, sin embargo, ya que Åqvist demuestra[302] que la fórmula:

$$(1)\ \sim LL(p \supset p) \vee LLL(q \supset q)$$

no es tesis de S2, sin embargo, puesto que $\vdash_{S6} \sim LL(p \supset p)$ y $\vdash_{T} LLL(q \supset q)$, (1) pertenece tanto a S6 como a T.

Otros cálculos de predicados modales

En la II parte consideramos cálculos de predicados basados en forma varia en T, S4 y S5 (y el sistema Brouweriano). Es posible, desde luego, contar con cálculos de predicados basados en los sistemas que hemos considerado en el presente capítulo. De hecho, los primeros desarrollos en lógica de predicados modal[303] estuvieron basados en S2 y S4.

Tales CEPs se diferenciarán, por supuesto, en que las muestras de sustitución CEP de una fórmula proposicional serán a veces teoremas y a veces no, dependiendo de la lógica proposicional subyacente. Pero también, como vimos en el caso de T, S4 y S5, las diferencias pueden equivaler a veces a más que esto.

Por ejemplo, Ruth Barcan añadió la fórmula que lleva su nombre a S2 en su forma estricta (a saber $M(\exists x)\alpha \dashv (\exists x)M\alpha$), cuando era suficiente añadir su forma material a T y sistemas más fuertes (pág. 126) puesto que la forma estricta podría ser entonces derivada fácilmente. Más aún, como hemos visto (pág. 128) esta fórmula sería un teorema de un CEP basado en cualquier sistema modal que contenga el sistema Brouweriano.

También cuando se añadan axiomas para la identidad a CEP + S2[304], podemos derivar LI (pág. 161) en su forma material (a saber $(x = y) \supset L(x = y)$, aunque no en su forma estricta $((x = y) \dashv L(x = y))$.

Sin embargo, poco trabajo ha sido realizado en esta área y pocas conclusiones pueden citarse.

---

300 Halldén [1949a].

301 Åqvist ([1964], pág. 79) denomina a este sistema S7.5, pero S9 parece ser un nombre mejor para él, ya que contiene a S8. Esto puede demostrarse fácilmente, puesto que $[Mp/p]$ en $Mp \supset LMp$ proporciona $MMp \supset LMMp$ y esto en unión de MMp proporciona el axioma S8 $LMMp$.

302 Op. cit., pág. 82.

303 Barcan [1946].

304 Barcan [1947], [1950].

CAPITULO XV

PROCEDIMIENTOS DE VALIDEZ Y DECISION PARA DIVERSOS SISTEMAS

En la I Parte dimos definiciones de validez para T, S4 y S5 en términos de modelos semánticos y en la base de estos modelos podíamos dar procedimientos de decisión para estos sistemas utilizando el método de diagramas semánticos. En esto seguíamos casi siempre, o adaptábamos, la obra de Kripke. Kripke también ha mostrado cómo aplicar esencialmente el mismo tipo de análisis a otros diversos sistemas modales, especialmente S2 y S3. En el presente capítulo veremos cómo se hace esto. Estableceremos con todo detalle los métodos para S2 y S3 y luego indicaremos brevemente cómo pueden modificarse para aplicarse a S6–S8, S3.5, S9, S0.5, S4.3 y D. Para muchos de los otros sistemas que hemos mencionado, sin embargo –incluyendo incluso S1– parece que no ha sido descubierta todavía ninguna semántica satisfactoria.

La validez en S2 y S3

Una razón por la que tendremos que hacer un cambio importante en nuestras anteriores definiciones de validez, si queremos aplicarlas a S2 y S3, es que estas definiciones –es decir las destinadas a T, S4 y S5– satisfacían todas ellas la regla de la Necesariedad. Es decir, si una fbf cualquiera, α, es válida en términos de cualquiera de estas definiciones, $L\alpha$ también es válida. Pero, como hemos observado, la regla de la Necesariedad no es válida, al menos de un modo no restringido, en S2 y S3 (y en otros cuantos sistemas).

Otra característica de S2 y S3, relacionada con ésta, que también ya hemos indicado, es la de ser compatibles con (aunque no contengan a) el axioma *MMp*. Esto significa que son compatibles con (aunque no nos lleven irremisiblemente a ello) el punto de vista que considera que toda proposición es "posiblemente posible". Esto sugiere una idea que es, de hecho, la clave de los modelos S2 y S3 de Kripke, la idea de que podrían existir algunos "mundos" en los que toda proposición sin excepción –incluso de la forma $p \cdot \sim p$– fuese posible[305]. Kripke denomina a tales mundos *no normales* y nosotros utilizaremos también esta terminología. Los mundos del tipo que aparece en los modelos T se denominan en contraste mundos *normales*. Las reglas para evaluar fórmulas no modales en mundos no normales son las mismas que en mundos normales –de este modo incluso en un mundo no normal nunca tenemos $V(p \cdot \sim p) = 1$, por ejemplo– pero para fórmulas modales en mundos no normales $V(M\alpha)$ tiene siempre el valor 1, y en consecuencia $V(L\alpha)$ tiene siempre el valor 0 (es decir en un mundo no normal ninguna proposición es necesaria).

[305] Kripke [1965b], págs. 210-211. Algunas sugerencias para interpretar la semántica que sigue aparecen en Cresswell [1967b].

En un modelo S2 debe haber por lo menos un mundo normal y puede haber (aunque no es necesario que haya) uno o más mundos no normales. Todo mundo normal es accesible a sí mismo. Todo mundo no normal es accesible por lo menos a un mundo normal. Pero ningún mundo (ni siquiera él mismo) es accesible a mundo no normal alguno. Por lo demás las relaciones de accesibilidad pueden ser como gustemos. En un modelo S3 contamos además con el requisito adicional de que la relación de accesibilidad sea transitiva. De este modo los modelos S3 guardan la misma relación con los modelos S2 que los modelos S4 con los modelos T. Se dirá que una fórmula es válida-S2 (o válida-S3) SI tiene el valor 1 en todos los mundos *normales* de todos los modelos S2 (o S3)[306].

La razón de estipular que un mundo no normal no deba ser accesible a sí mismo es ésta: deseamos poder decir que en cualquier mundo el valor de $L\alpha$ o $M\alpha$ está determinado por el valor de α en los mundos accesibles a ella; pero en un mundo no normal siempre tenemos $V(L\alpha) = 0$ y $V(M\alpha) = 1$, al margen del valor de α incluso en ese propio mundo. En un modelo S2 o S3, por consiguiente, la relación de accesibilidad no es irrestringidamente reflexiva. Es, sin embargo, reflexiva en el sentido más débil de que si un mundo cualquiera es accesible a un mundo dado, mu_i, entonces mu_i es accesible a sí mismo. Tal relación se denomina frecuentemente relación *cuasi-reflexiva*[307]. Dicho con más exactitud si MU es un conjunto de objetos, entonces R es una relación cuasi-reflexiva para MU SI para cada $mu_i \in$MU, si existe algún $mu_j \in$MU, tal que $mu_i R mu_j$, entonces $mu_i R mu_i$.

Establecemos ahora la definición de la validez-S2 formalmente. $<$MU, R, V$>$ es un modelo-S2 SI (a) MU es un conjunto de objetos (mundos); (b) R es una relación cuasi-reflexiva en la totalidad de MU; (c) si existe algún $mu_j \in$MU para el que no se dé el caso de que $mu_j R mu_j$ entonces existe algún $mu_i \in$MU tal que $mu_i R mu_j$; (d) existe al menos un $mu_i \in$ MU tal que $mu_i R mu_i$; y (e) V es una asignación de valor que satisface las siguientes condiciones:

1. Para cualquier variable proposicional, p_j, y cualquier $mu_i \in$ MU, o bien $V(p_j, mu_i) = 1$ o $V(p_j, mu_i) = 0$.
2. Para cualquier fbf, α, y para cualquier $mu_i \in$ MU, $V(\sim \alpha, mu_i) = 1$ si $V(\alpha, mu_i) = 0$. De lo contrario $V(\sim \alpha, mu_i) = 0$.
3. Para cualesquiera fbfs, α y β, y para cualquier $mu_i \in$MU, $V((\alpha \vee \beta), mu_i) = 1$ si o bien $V(\alpha, mu_i) = 1$ o $V(\beta, mu_i) = 1$. De lo contrario $V((\alpha \vee \beta), mu_i) = 0$.
4. Para cualquier fbf, α, y para cualquier $mu_i \in$ MU, $V(L\alpha, mu_i) = 1$ si $mu_i R mu_i$ y, para todo mu_j tal que $mu_i R mu_j$, $V(\alpha, mu_j) = 1$. De lo contrario $V(L\alpha, mu_i) = 0$ (La consecuencia de esto es que si mu_i es normal, $V(L\alpha, mu_i)$ se considera igual que en un modelo T; pero si mu_i es no normal, $V(L\alpha, mu_i) = 0$ en todos los casos– y por tanto, incidentalmente, $V(M\alpha, mu_i) = 1$ en todos los casos).

Una fbf, α, es válida-S2 SI en todos los modelos S2 $<$MU, R, V$>$ $V(\alpha, mu_i) = 1$ para todo $mu_i \in$ MU tal que $mu_i R mu_i$.

Un modelo S3 se define del mismo modo que un modelo S2, con la excepción de que añadimos la condición de que R sea transitiva. Una fbf α es válida-S3 SI en todo modelo S3 $<$MU, R, V$>$ $V(\alpha, mu_i) = 1$ para todo $mu_i \in$MU normal.

---

306 Si definimos la validez como la verdad en *todo* mundo (normal o no normal) de todo modelo, entonces tenemos una semántica para los sistemas que no contienen tesis alguna de la forma $L\alpha$ (*vide infra*, pág. 247 y s.).

307 Un ejemplo cotidiano de relación cuasi-reflexiva es "de la misma longitud que". Todo objeto tiene el mismo largo que sí mismo – siempre que tenga el mismo largo que alguna cosa (es decir siempre que tenga alguna longitud). Algunas cosas no tienen logitud en absoluto y *ellas* no son de la misma longitud que ellas mismas. Por tanto "de la misma longitud que" no es estrictamente reflexiva, pero es cuasi-reflexiva.

Para aquéllos que prefieran seguir con los juegos de salón del Capítulo 4, el juego S2 es igual que el juego T pero con las siguientes modificaciones. Algunas de las hojas de papel, son, por ejemplo, blancas, otras son rosa. En cada jugada S2 al menos un jugador debe tener una hoja blanca; pero algunos jugadores pueden tener en su lugar hojas rosa. Ningún jugador con una hoja rosa puede ver a ningún otro jugador, pero cada uno de estos jugadores debe ser visto por al menos un jugador que tenga una hoja blanca. Las reglas para responder cuando se nombren las fórmulas son, para los jugadores que tengan hojas blancas, exactamente igual que en el juego T. Para los jugadores que tengan hojas rosa, las reglas 1–3 son como en el juego T, pero las reglas 4 y 5 (las que comprenden el nombramiento de fórmulas con L y M) se sustituyen por las siguientes:

4′. Si el nombramiento es de la forma $L\alpha$, no levantes la mano.

5′. Si el nombramiento es de la forma $M\alpha$, levanta la mano.

Un nombramiento es ganador (successful) S2 SI en cada jugada S2 hace que todos los jugadores que tengan una hoja blanca levanten la mano. Una fórmula es válida-S2 SI da lugar a un nombramiento S2 ganador.

Para el juego S3 se hacen las mismas modificaciones al juego S4; por tanto el juego S3 es el juego S2 con la adición de la regla de que en toda jugada la relación de visualidad debe ser transitiva. Los nombramientos S3 ganadores y la validez S3 se definen entonces igual que antes con "S3" sustituyendo a "S2" en todos los lugares.

Demostramos ahora que toda tesis del sistema axiomático S2 es válida-S2 de acuerdo con la definición anterior. Es conveniente utilizar la axiomatización de S2 de Lemmon (Su sistema P2[308]).

Primero demostramos que si α es una fórmula CP válida entonces $L\,\alpha$ es válida S2. De acuerdo con las condiciones 1–3 para V, en todo modelo S2, $V(\alpha, mu_i) = 1$ para todo $mu_i \in MU$. Ahora bien la única situación que proporcionaría $V(L\,\alpha) = 0$ en cualquier mundo normal mu_i es aquélla en que hubiera algún mundo mu_j tal que $mu_i R mu_j$ y $V(\alpha, mu_j) = 0$. Pero no existe tal mundo. Por tanto para todo mundo normal, mu_i, $V(L\alpha, mu_i) = 1$.

Tenemos que demostrar a continuación que si α es uno de los otros axiomas de P2, $L\alpha$ es válido-S2. Evidentemente bastará demostrar que en todo modelo, $V(\alpha)=1$ en todos los mundos normales, o no normales, ya que esto proporcionará $V(L\alpha)= 1$ en todos los mundos normales. Estos axiomas son $Lp \supset p$ y $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$. Para mundos no normales podemos simplemente hacer notar que en todos los casos el antecedente es falso (ya que comienza por L) y que por tanto la implicación entera es falsa. Para mundos normales la prueba sigue como para T (pág. 67) con simples y evidentes modificaciones.

A continuación demostramos que la Regla de Becker, es decir,

$$\vdash L(\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash L(L\,\alpha \supset L\,\beta)$$

preserva la validez-S2. Hacemos esto mostrando que si $L(L\,\alpha \supset L\beta)$ no es válido-S2 tampoco lo es $L(\alpha \supset \beta)$. Supóngase entonces que $L(L\,\alpha \supset L\,\beta)$ no es válido-S2.

---

308 *Vide supra* pag. 207. Kripke (op. cit., pág. 208) utiliza una axiomatización ligeramente diferente basada en un conjunto infinito (aunque efectivamente especificable) de axiomas con la separación material como única regla primitiva de inferencia. Puede demostrarse fácilmente que su base axiomática es equivalente a la de Lemmon y para nuestros fines no hay nada que elegir entre ellas aunque, a diferencia de las bases que estamos utilizando, la base de Kripke permite la adición de $LL(p \supset p)$ a S2 sin obtenerse la regla no restringida de la Necesariedad y hace posible que una infinidad de sistemas sean generalizados mediante los axiomas $L_n(p \supset p)$(para cada n).

Esto significa que en algún modelo S2 existe algún mu_i normal tal que V $(L(L\alpha \supset L\beta), mu_i) = 0$. Por tanto existe algún mu_j tal que $mu_i R mu_j$ y V $(L\alpha \supset L\beta, mu_j) = 0$. Se sigue que V $(L\alpha, mu_j) = 1$ y V $(L\beta, mu_j) = 0$. Y de esto, a su vez, se sigue (a) que mu_j es normal y (b) que existe algún mundo mu_k, tal que $mu_j R mu_k$ y V $(\alpha, mu_k) = 1$ y V $(\beta, mu_k) = 0$. Por tanto V $((\alpha \supset \beta), mu_k) = 0$, y así, puesto que $mu_j R mu_k$, V $(L(\alpha \supset \beta), mu_j) = 0$. Pero mu_j es normal. Por tanto en algún mundo normal V $(L(\alpha \supset \beta)) = 0$; es decir $L(\alpha \supset \beta)$ no es válido S2.

Es fácil ver que las restantes reglas primitivas de P2, a saber, sustitución uniforme y Modus Ponens también preservan la validez-S2. Por tanto toda tesis de P2 (o S2) es válida S2.

Podemos hacer observar de pasada que siempre que exista al menos un mundo no normal (pongamos por caso mu_j) en un modelo-S2 entonces $LL(p \supset p)$ será falso en algún mundo normal (pongamos por caso mu_i) de ese modelo. Ya que puesto que mu_j no es normal, V $(L(p \supset p), mu_j) = 0$; pero debe haber algún mundo normal mu_i tal que $mu_i R mu_j$, y por tanto V $(LL(p \supset p), mu_i) = 0$. Esto demuestra que $LL(p \supset p)$ no es válido S2 y por tanto no es un teorema S2.

Demostramos ahora que todas las tesis de S3 son válidas S3. Utilizaremos nuevamente la axiomatización de Lemmon (P3, pág. 210). Evidentemente el requisito adicional de que R sea transitiva no afectará a ninguna de las pruebas anteriores para S2, por tanto toda tesis S2 es válida S3. Por consiguiente, tenemos que demostrar solamente que $L(p \supset q) \supset L(Lp \supset Lq)$ es válido S3 y sigue siendo válido S3 cuando le ponemos como prefijo L. Como en el caso de los axiomas S2, bastará con que demostremos que en todo modelo S3, V $((L(p \supset q) \supset L(Lp \supset Lq)), mu_i) = 1$ para todo mu_i, normal o no normal. Si mu_i es no normal, el resultado se sigue inmediatamente del hecho de que V $(L(p \supset q), mu_i) = 0$. Si mu_i es normal, argüimos del modo siguiente: Supóngase V $((L(p \supset q) \supset L(Lp \supset Lq)), mu_i) \neq 1$. Entonces (a) V $(L(p \supset q), mu_i) = 1$ y (b) V $(L(Lp \supset Lq), mu_i) = 0$. A partir de (b), puesto que mu_i es normal, existe algún mu_j $(mu_i R mu_j)$ para el que V $((Lp \supset Lq), mu_j) = 0$, y por consiguiente, V $(Lp, mu_j) = 1$ y V $(Lq, mu_j) = 0$. Por tanto mu_j es normal y existe algún $mu_k (mu_j R mu_k)$ para el que V $(p, mu_k) = 1$ y V $(q, mu_k) = 0$, y por tanto (c) V $((p \supset q), mu_k) = 0$. Pero R es transitiva, así pues tenemos $mu_i R mu_k$. Por tanto, a partir de (c), V $(L(p \supset q), mu_i) = 0$, y esto contradice a (a). Así pues, la hipótesis de que V $((L(p \supset q) \supset L(Lp \supset Lq)), mu_i) \neq 1$ ha resultado falsa.

Hemos demostrado por consiguiente que toda tesis de P3 (o S3) es válida S3.

Procedimientos de decisión para S2 y S3

Mostramos ahora cómo modificar los diagramas descritos en los capítulos 5 y 6 a fin de proporcionar procedimientos de decisión para S2 y S3[309].

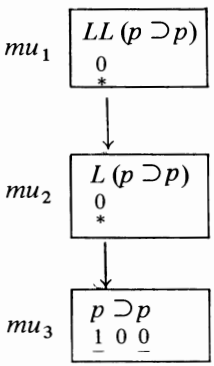
En estos diagramas representábamos los mundos mediante rectángulos. En los diagramas S2 y S3, podemos tener que representar dos tipos de mundos, normales y no normales. Utilizaremos rectángulos ordinarios como antes para los mundos normales y rectángulos con raya doble para los no normales.

En un diagrama S2 para una fórmula α estamos intentando construir un modelo en el que α sea falsa en algún mundo *normal*. Por consiguiente, comenzamos colocando a α en un rectángulo ordinario con 0 debajo de su operador principal, y evaluando y construyendo rectángulos subordinados como en un diagrama T. La

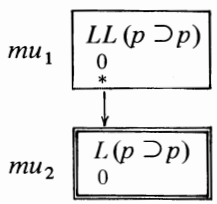
309 En Kripke [1965b], pág. 212 y ss. se encontrará material para los cuadros semánticos relacionados de S2 y S3. Procedimientos de decisión de un tipo completamente distinto aparecen en Matzumoto [1960], Ohnishi [1961a], [1961b].

diferencia entre un diagrama S2 y un diagrama T es ésta: siempre que lleguemos a un rectángulo (que no sea el primero) en el que toda fórmula que comience por L tenga el valor 0 y toda fórmula que comience por M tenga el valor 1, consideramos al mundo en cuestión como no normal. Puesto que en un mundo no normal $L\alpha = 0$ y $M\alpha = 1$, sin que importe el valor de α en ese mundo o cualquier otro, no es necesario que haya asteriscos en ningún rectángulo de raya doble, ni ninguna flecha de un rectángulo tal a cualquier otro. En consecuencia, podemos encontrar modelos S2 falsificadores para muchas fórmulas para las que no hay modelos T falsificadores; tales fórmulas son válidas T pero no son válidas S2.

Un simple ejemplo servirá para ilustrar cómo es el método. Tómese la fórmula $LL(p \supset p)$. Su diagrama T es:



La inconsistencia en mu_3 muestra que $LL(p \supset p)$ es válido T. Pero su diagrama S2 es:



Aquí mu_2 es no normal, por tanto no se precisa ningún tercer rectángulo y no se llega a ninguna inconsistencia. Por tanto $LL(p \supset p)$ no es válido S2.

Por el mismo tipo de razón que en el caso de los diagramas T todo diagrama S2 se acabará tras un número finito de pasos; y o bien se desarrollará una inconsistencia (en cuyo caso la fórmula original es válida) o de lo contrario no se desarrollará (en cuyo caso la fórmula no es válida). Por supuesto, algunas fórmulas requerirán unos cuantos diagramas alternativos, pero éstas se tratan del mismo modo que se explicó para T en la pág. 84 y ss. Por consiguiente el método puede ser aplicado a todas las fbfs.

Más aún, este procedimiento de decisión puede utilizarse como base de una prueba de completitud para S2 (axiomático). Ya que mediante un argumento del mismo tipo del que dimos para T en el capítulo 5 podemos demostrar que siempre que un sistema completo de diagramas S2 para una fórmula determinada sea consistente, esa fórmula puede ser obtenida como teorema de S2. Por tanto toda fór-

mula válida S2 es tesis de S2. Sin embargo, no daremos aquí los detalles de la prueba[310].

Los diagramas S3 se diferencian de los diagramas S2 del mismo modo que los diagramas S4 se diferencian de los diagramas T (*vide* Capítulo 6). Es decir, los diagramas S3 son iguales a los diagramas S2, excepto en que para cualesquiera rectángulos, mu_i, mu_j, mu_k, siempre que haya una flecha de mu_i a mu_j y de mu_j a mu_k, debe trazarse también una flecha de mu_i a mu_k y deben incluirse en mu_k las fórmulas y valores apropiados. Una vez más el método nos proporciona un procedimiento de decisión y podemos basar en él una prueba de completitud para S3.

La validez en S6–S8

Unos cuantos sistemas modales más pueden tratarse de modo semejante. De ellos comenzamos con S6 (S2 + *MMp*), S7 (S3 + *MMp*) y S8 (S3 + *LMMp*)[311].

En un modelo-S2 puede haber mundos no normales pero no hace falta que haya ninguno; en un modelo S6 debe existir al menos uno. Cada uno de tales mundos será desde luego accesible a algún mundo normal. Si definimos un mundo no normal como antes podemos decir entonces que $<$MU, R, V$>$ es un modelo S6 SI (a) es un modelo S2 y (b) existe algún $mu_j \in$ MU tal que no se da el caso de que $mu_j R mu_j$. Se sigue que en todo modelo S6 $<$MU, R, V$>$ existe algún $mu_i \in$ MU normal y algún $mu_j \in$ MU no normal, tal que $mu_i R mu_j$. Una fbf, α, es válida S6 SI en todo modelo S6, V (α, mu_i) = 1 para todo mu_i tal –es decir para todo mundo (normal) al que sea accesible cualquier mundo no normal.

De acuerdo con las definiciones de los modelos S2 y S6, los modelos S6 son un subconjunto de los modelos S2. Más aún, los mu_is en los que se requiere para la validez de S6 que V (α, mu_i) = 1, siendo todos normales, son un subconjunto de aquéllos en los que se requiere esto para la validez S2. Por tanto, si una fórmula es válida S2 es también válida S6, y así también toda tesis de S2 es válida S6. Demostramos ahora que el axioma especial S6 *MMp* es válido S6. Sea $<$MU, R, V$>$ cualquier modelo S6 y mu_j cualquier mundo no normal de MU. Entonces, puesto que mu_j es no normal, V (*Mp*, mu_j) = 1; por tanto para cualquier mu_i tal que $mu_i R mu_j$ V(*MMp*, mu_i) = 1. No es difícil demostrar que las reglas de transformación preservan la validez S6, y esto produce como consecuencia que toda tesis S6 sea válida S6.

Los modelos y la validez de S7 se definen como los de S6, pero leyéndose "S3" en lugar de "S2". La prueba de que toda tesis S7 es válida S7 se realiza de modo análogo.

Para S8 tenemos lo siguiente. $<$MU, R, V$>$ es un modelo S8 SI (a) es un modelo S3 y (b) para *todo* $mu_i \in$ MU normal existe un mu_j no normal tal que $mu_i R mu_j$. Una vez más decimos que una fórmula, α, es válida-S8 SI, en todo modelo S8, V (α, mu_i) = 1 para todo mu_i normal al que sea accesible cualquier mu_j no normal. Puesto que, sin embargo, en un modelo S8 *todo* mundo normal tiene un mundo no normal accesible a él, podemos simplemente volver a la formulación utilizada para S2 y S3, y decir que una fórmula es válida S8 SI, en todo modelo S8, tiene el valor 1 en todo mundo normal.

Por la misma razón que antes, toda fórmula válida S3 (y por tanto toda tesis de S3) es válida S8. Demostramos ahora que el axioma especial S8 *LMMp* es válido S8. Evidentemente bastará que demostremos que V(*MMp*, mu_i)=1 para todo $mu_i \in$MU,

---

310 Pruebas de completitud para S2 y los sistemas inmediatamente siguientes, basadas en cuadros semánticos, se encontrarán en Kripke [1965b], págs. 214-217.

311 *Vide* Kripke, op. cit., pág. 220.

normal o no normal. Si mu_i es no normal se sigue inmediatamente que V (*MMp*, mu_i) = 1. Si mu_i es normal, entonces existe algún mundo no normal mu_j tal que $mu_i R mu_j$. Puesto que mu_j es no normal, V(*Mp*, mu_j)=1; por tanto V(*MMp*, mu_i)=1. Por consiguiente, *LMMp* es válido S8. Una vez más las reglas de transformación preservan la validez, así pues, toda tesis de S8 es válida S8.

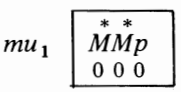
Procedimientos de decisión para S6–S8

Un diagrama S6 es un diagrama S2 con el requisito de que una flecha debe ir del primer rectángulo a un rectángulo de raya doble (que representa a un mundo no normal). No hace falta que un diagrama S6 contenga más de un rectángulo de raya doble, pero uno debe estar conectado con el *primer* rectángulo, ya que de lo contrario el valor de la fórmula del primer rectángulo no se podría tener en cuenta por lo que a la validez S6 se refiere. Puede considerarse que un rectángulo de raya doble contiene implícitamente todas aquellas partes bien formadas de las fórmulas que en él aparecen que comiencen por *L* o *M*, evaluadas como 0 ó 1 respectivamente; pero no hace falta escribir estos valores si recordamos que si las otras reglas nos obligan a poner un 1 debajo de una *L* o un 0 debajo de una *M* en un rectángulo de raya doble esto se considera una inconsistencia y demuestra que la fórmula original es válida.

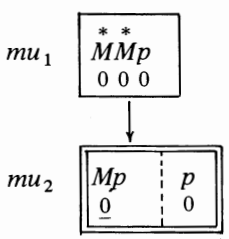
Un diagrama S7 es un diagrama S3 con un requisito semejante. Un diagrama S8 es un diagrama S3 pero con el requisito más exigente (stronger) de que una flecha debe ir desde *cada* rectángulo de raya sencilla a cada rectángulo de raya doble.

Como ilustración, simplemente, mostramos mediante diagramas que *MMp* no es válido S2 pero sí válido S6 y que *LMMp* no es válido S6 pero sí válido S8.

MMp resulta imediatamente falso de acuerdo con el diagrama S2 de un rectángulo:

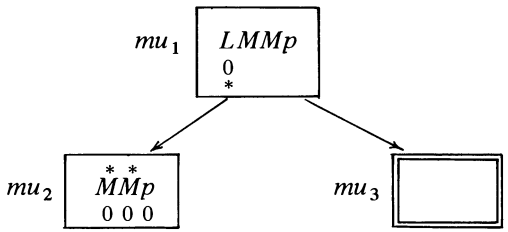


Este diagrama está completo para S2, ya que no aparecen asteriscos debajo de ninguno de los valores y no se *precisan* rectángulos de doble raya en los diagramas S2. En un diagrama S6, sin embargo, debemos tener un rectángulo de doble raya conectado con mu_1. Por tanto el diagrama S6 es:

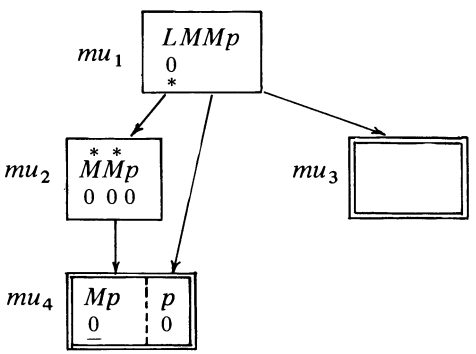


Aquí el asterisco que aparece encima de la primera *M* de mu_1 nos obliga a poner *Mp* = 0 en mu_2, pero en un rectángulo de doble raya esto equivale a una inconsistencia. Por tanto *MMp* es válido-S6.

Volviendo ahora a *LMMp* tenemos el diagrama S6 y S7:



Aquí no aparece ninguna inconsistencia. El tener $MMp = 0$ en mu_2 es suficiente para proporcionar $LMMp = 0$ en mu_1; no tenemos que tenerlo también en mu_3. Por tanto *LMMp* no es válido S6. En un diagrama S8, sin embargo, un rectángulo de raya doble debe estar conectado no solamente con mu_1 sino con mu_2 también. Por tanto tenemos para S8:



(Obsérvese que la transitividad de la relación de accesibilidad en S8 exige una flecha de mu_1 a mu_4; de hecho esto hace innecesario a mu_4, pero lo hemos puesto para facilitar la comparación con el diagrama anterior). Se demuestra que *LMMp* es válido S8 porque un asterisco en mu_2 nos obliga a poner $Mp = 0$ en el rectángulo de doble raya mu_4.

El método de los diagramas semánticos nos proporciona un procedimiento de decisión para S6, S7 y S8 y puede dar lugar a una prueba de completitud para estos sistemas.

Los sistemas S3.5 y S9

Los lógicos modales han especulado a veces acerca de si existen extensiones de S3 que sean más débiles que S5 pero que pudieran convertirse en S5 si se les añadiese la regla de la Necesariedad ($\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$). De hecho existen tales sistemas y el S3.5 de Åqvist que mencionamos brevemente en el capítulo anterior es uno de ellos[312]. S3.5 es el sistema formado mediante la adición del axioma $Mp \supset LMp$ (o la evidente alternativa, $\sim Lp \supset L \sim Lp$) a S3. Es evidente que la regla de la Necesariedad fortalecería a este sistema convirtiéndolo en S5, ya que aplicándola al axioma propio obtenemos $Mp \dashv LMp$, que fortalece incluso a S1 convirtiéndolo

[312] Åqvist [1964], págs. 82-84. *Vide* también *supra* pág. 219 y Cresswell [1967a].

en S5. Estamos ahora en posición de estudiar a S3.5 desde un punto de vista semántico.

La manera más sencilla de definir los modelos S3.5 es la de eliminar por completo la relación R y en consecuencia nuestra anterior definición de mundos normales y no normales. En su lugar diremos simplemente que los mundos no normales son un subconjunto arbitrario (posiblemente vacío) de MU. También tendremos que dar una regla de asignación de valor diferente para L, ya que la que dimos antes estaba expresada en términos de R, pero lo haremos de tal modo que una vez más $L\alpha$ tendrá siempre el valor 0 en todos los mundos no normales. Procedemos del siguiente modo:

$<$MU, N, V$>$ es un modelo S3.5 SI (a) MU es un conjunto de objetos (mundos); (b) N es un subconjunto no vacío (posiblemente no el propio[313]) de MU; y (c) V es la asignación de valor que satisface las condiciones 1, 2 y 3 para un modelo S2 (pág. 193) y además:

4′. Para cualquier fbf α y para cualquier $mu_i \in$ MU, V $(L\alpha, mu_i) = 1$ si $mu_i \in$ N y, para todo $mu_j \in$ MU, V $(\alpha, mu_j) = 1$. De lo contrario V $(L\alpha, mu_i) = 0$.

(N es por supuesto el conjunto de mundos normales en nuestra nueva explicación de ellos y esta última condición asegura que si mu_i es no normal, V $(L\alpha, mu_i) = 0$ y en consecuencia V $(M\alpha, mu_i) = 1$).

Una fórmula, α, es válida S3.5 SI para todo modelo S3.5 $<$MU, N, V$>$, V $(\alpha, mu_i) = 1$ para todo $mu_i \in$ N.

No es difícil demostrar (aunque omitamos los detalles aquí) que si es imposible hacer a una fórmula α falsa en cualquier modelo S3, es también imposible hacer a α falsa en ningún modelo S3.5; es decir que todas las fórmulas válidas S3 (y por tanto todas las tesis de S3) son válidas S3.5. Demostramos ahora que el axioma propio de S3.5 –a saber $Mp \supset LMp$– es válido S3.5.

Si $Mp \supset LMp$ no es válido S3.5 entonces en algún modelo S3.5 $<$MU, N, V$>$ existe algún $mu_i \in$ N para el que (a) V $(Mp, mu_i) = 1$ y (b) V $(LMp, mu_i) = 0$. A partir de (b), puesto que $mu_i \in$ N, tenemos V $(Mp, mu_i) = 0$ para algún $mu_j \in$ MU, por tanto V $(p, mu_k) = 0$ para todo $mu_k \in$ MU. Se sigue que V $(Mp, mu_i) = 0$, en contra de (a), y esto hace falsa la suposición de que $Mp \supset LMp$ no es válido S3.5.

Puesto que aquí también las reglas preservan la validez tenemos como resultado que toda tesis de S3.5 es válida S3.5. Pueden construirse del mismo modo que antes un procedimiento de decisión y una prueba de completitud para S3.5.

El axioma propio de S5, $L\,(Mp \supset LMp)$, sin embargo, no es válido S3.5, y por tanto S3.5 es más débil que S5. Sea $<$MU, N, V$>$ un modelo S3.5 en el que $mu_j \notin$ N. Entonces V $(Mp, mu_j) = 1$ y V $(LMp, mu_j) = 0$ y por tanto V $((Mp \supset LMp), mu_j) = 0$. Por tanto, para cualquier $mu_i \in$ N, V $(L\,(Mp \supset LMp), mu_i) = 0$. Expresado de un modo menos formal: aunque en tal modelo $Mp \supset LMp$ es verdadero en todo mundo normal, es falso en todo mundo no normal, y esto hace a $L(Mp \supset LMp)$ falso en los mundos normales.

S9 es S3.5 + MMp. Al igual que en los demás sistemas que contengan MMp, se requiere que en todo modelo tal exista algún mundo no normal. Así pues, definimos un modelo S9 del mismo modo que un modelo S3.5, con la excepción de que sustituimos (b) por (b′): N es un subconjunto no vacío *propio* de MU. La validez se define entonces como para S3.5.

Demostramos que MMp es válido S9. En todo modelo S9 debe haber por lo menos un $mu_i \in$ N y por lo menos un $mu_j \notin$ N. Si $mu_j \notin$ N, entonces V $(Mp, mu_j) = 1$;

313 Es decir N puede ser (aunque no hace falta que sea) la totalidad de MU.

por tanto para todo $mu_i \in$ N, V (MMp, mu_i) = 1; es decir, MMp es válido S9. La completitud puede demostrarse del mismo modo que en los sistemas anteriores.

El sistema S0.5

Podemos dar una explicación de la validez para S0.5 (pág. 213) modificando la explicación que dimos para S2. Un mundo no normal es también aquí un mundo al que ningún mundo es accesible; en un modelo S0.5, sin embargo, el valor de $L\alpha$ en un mundo no normal no es necesario que sea 0, sino que puede ser 1 ó 0 (y por tanto también puede serlo así el valor de $M\alpha$). Por lo demás, todo es igual que para S2. Por consiguiente, definimos un modelo S0.5 $<$MU, R, V$>$ del mismo modo que un modelo S2, con la excepción de que la regla de asignación de valor para L se sustituye por:

Para cualquier fbf, α, y para cualquier $mu_i \in$ MU: (i) si mu_i es normal, V ($L\alpha$, mu_i) = 1 si para todo $mu_j \in$ MU tal que $mu_i R mu_j$, V (α, mu_j) = 1; de lo contrario V ($L\alpha$, mu_i) = 0; (ii) si mu_i es no normal, o bien V ($L\alpha$, mu_i) = 1 o V ($L\alpha$, mu_i) = 0.

La validez de S0.5 se define igual que la validez S2; es decir, α es válida S0.5 SI en todo modelo $<$MU, R, V$>$, V(α, mu_i) = 1 para todo $mu_i \in$ MU normal.

Demostramos brevemente que toda tesis de S0.5 es válida S0.5. Si α es una fbf válida de CP, evidentemente V (α, mu_j) = 1 para todo $mu_j \in$ MU; por tanto V ($L\alpha$, mu_i) = 1 para todo $mu_i \in$ MU normal. Para $Lp \supset p$: si mu_i es normal y V (Lp, mu_i) = 1, entonces, puesto que $mu_i R mu_i$, V (p, mu_i) = 1; por tanto V (($Lp \supset p$), mu_i) = 1. Para $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$: si para cualquier $mu_i \in$ MU, normal, V ($(L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq))$, mu_i) = 0, entonces V ($L(p \supset q)$, mu_i) = 1, V (Lp, mu_i) = 1 y V (Lq, mu_i) = 0; por tanto existe algún $mu_j \in$ MU para el que V (($p \supset q$), mu_j) = 1, V (p, mu_j) = 1 y V (q, mu_j) = 0; pero esto es imposible incluso en un mundo no normal. Puesto que la sustitución y el Modus Ponens evidentemente preservan la validez, toda tesis de S0.5 es válida S0.5.

Para los diagramas S0.5 el método más sencillo es escribir la fórmula en un rectángulo de raya sencilla, evaluarla según el modo habitual y hacer todos los demás rectángulos con raya doble. De este modo nunca tenemos que ir más allá de la segunda fila de rectángulos. En un rectángulo de raya doble (un mundo no normal) podemos tener $L\alpha = 1$ o $L\alpha = 0$, cualquiera que sea el valor de α (y de modo semejante con $M\alpha$). Sin embargo, no podemos tener a la vez $L\alpha = 1$ y $L\alpha = 0$ en el mismo rectángulo (siendo α exactamente la misma expresión en los dos casos); de este modo no podemos tener en un rectángulo a la vez $Lp = 1$ y $Lp = 0$, aunque podríamos tener $Lp = 1$ y $L \sim\sim p = 0$. Se puede desarrollar sin dificultad una prueba de completitud[314].

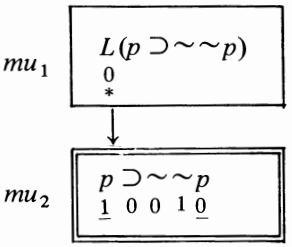
Comparando las tres siguientes fórmulas pueden observarse algunas de las peculiaridades del sistema S0.5:

(1) $L(p \supset \sim\sim p)$
(2) $LL(p \supset \sim\sim p)$
(3) $L(Lp \supset L \sim\sim p)$

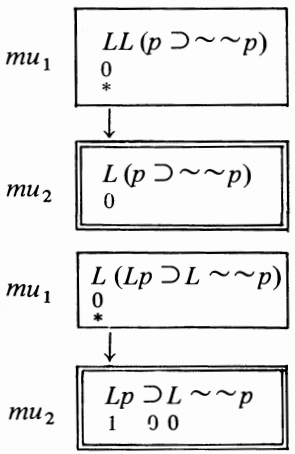
De éstas, (1) es válida en S0.5, pero (2) y (3) no lo son. Utilizando diagramas, tenemos, para (1):

---

314 Cresswell [1966a]. De hecho, podríamos definir los modelos S0.5 de tal modo que cada modelo S0.5 contuviese solamente un mundo normal. Si lo hiciéramos así la relación R resultaría redundante.



Pero para (2) tenemos:



Y para (3):

Sin duda deberíamos esperar este resultado para (2), ya que S0.5 es más débil que S1 y S1 no tiene ninguna tesis de la forma $LL\alpha$; pero (3) es una fórmula que *demuestra* que S0.5 es más débil que S1, ya que (3) es una tesis de S1. Todos estos resultados, sin embargo, están en perfecto acuerdo con la interpretación que Lemmon sugiere del operador L en S0.5, a saber "es una tautología funcional de verdad que...". De acuerdo con esta interpretación lo que (1) significa es:

(4) Es una tautología funcional de verdad que $p \supset \sim\sim p$

—y esto es verdadero. Pero lo que (2) significa es que (4) misma es una tautología funcional de verdad y esto es falso; (4) es sin duda una verdad necesaria, pero una verdad necesaria de algún otro tipo. En cuanto a (3), la parte entre paréntesis significará:

(5) Si es una tautología funcional de verdad que p, entonces es una tautología funcional de verdad que $\sim\sim p$.

Aquí también (5) es verdadera, incluso necesariamente verdadera, pero no es ella misma una tautología funcional de verdad, que es lo que, de acuerdo con esta interpretación, (3) dice que es.

Otra importante característica de S0.5 que surge de la invalidez de (3) es que la regla de sustitución de equivalentes estrictos no es válida en él. Ya que la regla CPL nos proporciona $\vdash L(p \supset p)$ y allí $[Lp/p]$ da

(6) $L(Lp \supset Lp)$

mientras que CPL también proporciona $\vdash L(p \equiv \sim\sim p)$ y por consiguiente

(7) $(p = \sim\sim p)$

Pero aplicando la sustitución de equivalentes a (6) y (7) producirán (3), que como hemos visto no es una tesis.

Sistemas que contienen a T

En el capítulo 4 definimos los modelos T y la validez T. También mostramos que si imponemos ciertas restricciones a la relación R en los modelos T obtenemos las definiciones correspondientes de validez para S4, el sistema Brouweriano y S5. Las condiciones eran que para S4 R debe ser transitiva, para el sistema Brouweriano debe ser simétrica y para S5 debe ser tanto transitiva como simétrica. Todas estas condiciones se añaden al requisito de la reflexividad para R en los modelos para los sistemas que contengan a T. Los mundos no normales no desempeñan, por supuesto, papel alguno en tales modelos.

Al menos dos de los sistemas que contienen a T pueden ser tratados añadiendo restricciones a R en modelos T. Decimos que una relación R está *conectada* (en todo un conjunto, MU) SI es válida en una dirección u otra, entre cada par de MU: es decir, SI para todo $mu_i, mu_j \in$ MU, ya bien $mu_i R mu_j$ o $mu_j R mu_i$[315].

Intuitivamente, cuando R es transitiva, decir que R está conectada en todo MU significa que podemos considerar los miembros de MU formando una línea sencilla, en la que cualquier miembro aparece delante, o detrás, o en el mismo lugar que cualquier otro miembro. Este requisito coincide con una interpretación temporal de los miembros de MU como instantes de tiempo, y de hecho si añadimos la condición de que R sea transitiva y conectada en la totalidad de MU, obtenemos una explicación de la validez para S4.3[316].

Habiendo establecido que R sea transitiva y conectada en la totalidad de MU, podemos proceder a añadir el requisito más exigente de que R sea *discontinua* (discrete). La idea intuitiva de ello es que entre los objetos que están relacionados con un objeto, x, existe uno, y, que es el "próximo" o "más cercano" a x –es decir, entre x e y no existe un tercer objeto relacionado con x. Una relación discontinua puede ser considerada como una relación de paso a paso. Para los modelos semánticos podemos expresar aquí el requisito adicional del modo siguiente: Para todo $mu_i \in$ MU existe algún $mu_j \in$ MU tal que (a) $mu_i R mu_j$ y (b) para cualquier $mu_k \in$ MU, si $mu_i R mu_k$ y $mu_i \neq mu_k$, entonces $mu_j R mu_k$ y $mu_j \neq mu_i$. (La ilustración del tiempo de Prior concebido como una serie de momentos puede servir nuevamente para hacer más claro el sentido de esta definición. Podemos considerar que $mu_i R mu_j$ significa que mu_j es lo mismo que o posterior a mu_i. Aquí R es evidentemente transitiva y conectada con todo el conjunto de momentos. Decir que R es también discontinua equivale entonces a esto: que para cualquier momento existe un segundo momento que es posterior a él, y cualquier momento posterior al primero es también posterior al segundo o de lo contrario *es* el segundo. Esto precisa la idea de que después de cada momento existe otro que sigue). Si establecemos ahora este requisito adicional de que R sea discontinua, tenemos una definición de la validez para el sistema D (*vide* pág. 217 y s.).

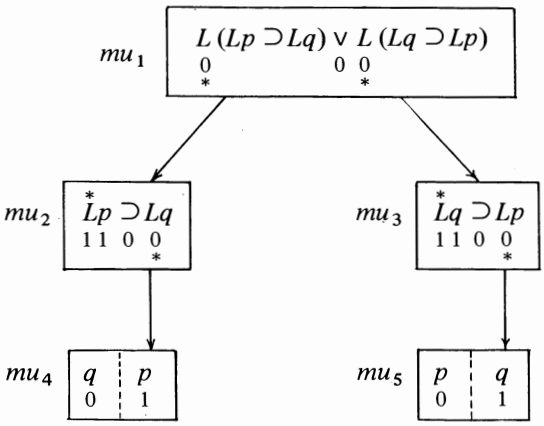
El método de los diagramas semánticos puede adaptarse fácilmente al sistema S4.3 Como ejemplo, mostramos cómo probar la validez de $L(Lp \supset Lq) \vee L(Lq \supset Lp)$

315 A una relación de este tipo se le denomina a veces *bien-conectada* o *fuertemente-conectada* para distinguirla de cuando se da el caso de que sólo exigimos el requisito más débil de que la relación se mantenga entre dos elementos *distintos* de MU cualesquiera –es decir si usamos la definición de que para todo mu_i, $mu_j \in$ MU si $mu_i \neq mu_j$ entonces o bien $mu_i R mu_j$ o $mu_j R mu_i$.

316 *Vide supra* pág. 217 y también Kripke [1963a], pág. 95. La completitud de S4.3 se demuestra (algebraicamente) en Bull (1965a). *Vide* también Prior [1962].

cuando R está conectada (y es asimismo reflexiva y transitiva).

El diagrama T para esta fórmula (que demuestra que no es válida en T) es:



(y evidentemente éste es el único tipo de diagrama T que podría hacer a la fórmula falsa).

Si, no obstante, necesitamos que R esté conectada, entonces se seguirá que debemos tener o bien $mu_4 R mu_5$ o $mu_5 R mu_4$. Si tenemos lo primero, entonces, (puesto que R debe también ser transitiva) tenemos $mu_2 R mu_5$ y por tanto se debe asignar 1 a p en mu_5, haciéndolo de este modo inconsistente. Si tenemos lo segundo, entonces, por motivos semejantes se debe asignar 1 a q en mu_4, que *lo* hace inconsistente. Por tanto, en cualquier caso mu_1 se considerará inconsistente y por consiguiente tenemos la validez S4.3 de $L\,(Lp \supset Lq) \vee L\,(Lq \supset Lp)$.

El estudio semántico de los sistemas que contienen a T se realiza típicamente imponiendo condiciones a la relación R. Debe quedar claro que estas condiciones de R pueden reflejarse frecuentemente mediante reglas para la construcción de diagramas apropiados (o cuadros semánticos).

El postulado de existencia

Para todos los sistemas que hemos discutido semánticamente, excepto para S6–S9, podemos tener modelos en los que MU tenga solamente un miembro. Es esta característica lo que los hace "regulares" en el sentido de la pág. 221, ya que un modelo con un mundo es un modelo en el que Lp y p tienen el mismo valor de verdad y en el que $p \supset Lp$ es verdadero. Generalmente hemos considerado suficiente para la conservación del status modal de un sistema el que no degenerase en CP (págs. 60-61), pero podríamos haber insistido en un requisito más exigente, a saber, que el sistema contuviese una fórmula que fuese incompatible con el degenerar en CP. La razón para hacer eso sería la convicción de que existen proposiciones que son verdaderas pero no necesariamente verdaderas y que esto es un hecho de la lógica y que debería ser expresado en los sistemas modales.

En Lewis y Langford[317] se hace uso de cuantificadores que abarcan variables proposicionales. Así podríamos tener

$$(1)\ \sim(p)\,(p \supset Lp)$$

317 Lewis and Langford [1932], págs. 178-198.

para expresar el hecho de que no toda proposición verdadera es necesaria. En Lewis y Langford se utiliza la fórmula

$$(2)\ (\exists p)(\exists q)(\sim(p \dashv q) \cdot \sim(p \dashv \sim q))$$

y puede demostrarse fácilmente que esto es equivalente a (1) (cuando se añaden axiomas cuantificacionales apropiados). Lewis denomina a (2) "postulado de existencia" y lo considera como una posible adición a S1 o S2, aunque también podemos considerarlo como una adición a cualquiera de los otros sistemas. Semánticamente la regla para el cuantificador universal que abarca proposiciones es:

[V $\forall p$]. Para cualquier fbf, α, cualquier variable proposicional, p y cualquier $mu_i \in$ MU, V $((p)\ \alpha, mu_i) = 1$ si para toda V′ que se diferencia de V sólo en la asignación (en cualquier $mu_i \in$ MU) a p, V′$(\alpha, mu_i) = 1$; de lo contrario V $((p)\ \alpha, mu_i) = 0$[318].

Puede verse que [V $\forall p$] refleja el significado del cuantificador universal cuando se aplica a proposiciones. Ya que dice que $(p)\alpha$ será verdadero en mu_i SI, cualquiera que sea el valor de verdad de p en mu_i o en otros mundos del modelo (el valor de p en otros mundos que no sean mu_i puede por supuesto afectar al valor de α en mu_i) α es verdadera en mu_i.

Con esta regla $\sim(p)\ (p \supset Lp)$ será verdadero en cualquier mundo mu_i de un modelo siempre que exista al menos otro mundo, mu_j, en ese modelo (tal que $mu_i R mu_j$). Porque si existe, entonces, dada la asignación V en el modelo, podemos definir V′ que es igual a V excepto en que V′$(p, mu_i) = 1$ y V′$(p, mu_j) = 0$, a partir de lo cual tenemos V′$((p \supset Lp), mu_i) = 0$ y por tanto de acuerdo con [V $\forall p$], V $((p)\ (p \supset Lp), mu_i) = 0$, es decir V $(\sim(p)\ (p \supset Lp), mu_i) = 1$. Y, a la inversa, si existe en el modelo un mundo mu_i con ningún otro mu_j accesible a él la fórmula resultará falsa. Así pues, la condición (de que exista un mundo distinto accesible a cualquier mundo (normal) del modelo) es equivalente a la validez del postulado de existencia.

Uno podría tener fórmulas análogas, más complicadas, cuya validez sería equivalente a afirmar al menos 3, 4... o un número infinito de mundos; pero una investigación de este tipo nos llevaría más allá del presente capítulo y por supuesto mucho más lejos que el presente estadio de desarrollo de la materia.

---

318 Los cuantificadores que cubren las variables proposicionales pueden introducirse en el cálculo proposicional ordinario (*vide* Church [1956], págs. 151-154) y en el CEP no modal (*ibid.*, págs. 296-300). En estos sistemas podemos demostrar $(p)\ \alpha \equiv (\beta\ .\ \gamma)$, donde β es α con alguna fórmula habitual verdadera, pongamos por caso $(p \supset p)$, en todos los lugares en vez de p libre en α y γ es α con alguna fórmula habitual falsa (pongamos por caso $(p\ .\ \sim p)$) en todos los lugares en vez de p libre en α. De este modo aquí $(p)\ \alpha$ puede considerarse simplemente como una abreviatura de $(\beta\ .\ \gamma)$. Los sistemas en los que puede hacerse esto se denominan frecuentemente sistemas *extensionales* y los sistemas en los que no puede hacerse sistemas *intensionales*. Los sistemas modales son intensionales puesto que podemos mostrar fácilmente que $(p)(p \supset Lp) \equiv (((p \supset p) \supset L(p \supset p))\ .\ ((p\ .\ \sim p) \supset L(p\ .\ \sim p)))$ no es un teorema de ninguno de los sistemas modales que hemos discutido. (La parte derecha es un teorema de todos ellos pero si la parte izquierda fuese un teorema tendríamos, de acuerdo con $\forall 1, \vdash p \supset Lp$, y el sistema degeneraría en CP). Para un estudio semántico de una lógica intensional con cuantificación para variables proposicionales *vide* Cresswell [1966b], [1967c]. La modalidad puede tratarse extensionalmente si los operadores modales se consideran como predicados que designan propiedades de las sentencias o fórmulas; *vide* Montague [1963], Löb [1966] cf. también Fitch [1937], [1939], [1948] y Lewis [1968].

CAPITULO XVI

SISTEMAS NO HABITUALES

Este capítulo contiene una variedad de sistemas, unidos –si ésa es la palabra– sólo por el hecho de que de un modo u otro no consiguen satisfacer las condiciones enumeradas al principio del capítulo 14. Nos contentaremos casi siempre con esbozar los sistemas sin intentar prueba alguna.

Sistemas con operadores primitivos distintos a *L* o *M*

Como es bien sabido en el CP ordinario, no modal, bivalente podemos, dentro de ciertos límites, elegir qué operadores consideraremos primitivos. De este modo $\sim$ y $\vee$, $\sim$ y $\cdot$, y $\sim$ y $\supset$, forman pares igualmente satisfactorios de operadores primitivos. Podemos incluso considerar un solo operador como primitivo y definir todo el resto en términos de él. El primer operador primitivo tal que se descubrió fue la raya de la "negación alternativa" (alternative denial) a menudo denominada *raya Sheffer*[319]: p/q ha de entenderse teniendo el valor 1 excepto cuando p y q tienen ambos el valor 1; ha de entenderse, por tanto, del mismo modo que $\sim p \vee \sim q$ en la interpretación habitual (standard).

Todos los sistemas modales que hemos examinado hasta ahora han tenido o bien L o bien M como operadores primitivos y los otros operadores modales se definían en términos de uno de éstos (junto con operadores no modales). Podemos, sin embargo, tener otros operadores modales primitivos que no sean éstos, por lo menos en bastantes sistemas. Es posible incluso tener un solo operador (triádico) en términos del cual puedan definirse todos los demás operadores, *ya modales o funcionales de verdad.* Halldén[320] da como primitivo un operador $[p, q, r]$ que ha de entenderse que significa: o bien p es falsa, o q es falsa, o r es imposible –es decir lo que expresaríamos ordinariamente mediante $(\sim p \vee \sim q \vee \sim Mr)$. Demuestra este autor que en todos los sistemas más fuertes que S1 son satisfactorias entonces las siguientes definiciones:

$$\sim\alpha = {}_{\mathrm{Df}}\ [\alpha, \alpha, \alpha]$$
$$(\alpha \cdot \beta) = {}_{\mathrm{Df}} \sim [\alpha, \beta, [\alpha, \sim\alpha, \alpha]]$$
$$M\alpha = {}_{\mathrm{Df}} \sim [[\alpha, \sim\alpha, \alpha],\ [\alpha, \sim\alpha, \alpha],\ \alpha]$$

y desde luego ya sabemos que todos los demás operadores del sistema en cuestión pueden expresarse en términos de los tres acabados de definir.

---

319 Sheffer [1913]. El otro único operador diádico en términos del cual pueden definirse *todas* las demás funciones veritativas es la "negación conjunta" (joint denial) que puede escribirse como $\downarrow$. $p \downarrow q = 0$ excepto cuando se dan ambas cosas $p = 0$ y $q = 0$.

320 Halldén [1949b]. Cf. Alban [1943], Massey [1966], págs. 599-602, [1967].

Un operador tal como el de Halldén quizá pueda parecer, sin embargo, un tanto artificial; en cualquier caso, no proseguiremos más adelante con este tema.

Observamos anteriormente que una de las propuestas orginales de Lewis era la de utilizar la disyunción estricta como operador primitivo[321]. Un operador primitivo diádico más popular ha sido la implicación estricta. Si se tiene un operador primitivo de esta clase, una cosa que se puede hacer es desde luego intentar definir otros en términos de dicho operador, pero también se puede tratar de ver lo que se puede hacer con él solo. La parte de CP (no modal) en la que la implicación material es el único operador se denomina frecuentemente cálculo de la *implicación pura (material)*[322]. De modo análogo si partimos de un sistema modal S, en el que aparece $\dashv$, podemos formar su parte de implicación pura estricta que contendrá todas y sólo aquellas tesis de S en las que $\dashv$ es el único operador. Desde luego, si partimos de S5 obtendremos un cálculo distinto de la implicación pura estricta que obtendríamos a partir, por ejemplo, de T o de S4.

En 1956 un grupo de lógicos realizó una investigación de cálculos de implicación pura estricta[323]. Dieron los nombres de C1–C5 a las partes implicacionales de S1–S5 respectivamente, y CT a la parte análoga de T, y nosotros utilizaremos esta terminología aquí. Se concentraron principalmente en C5, para el cual uno del grupo, C.A. Meredith, dio unas cuantas axiomatizaciones alternativas[324]. Una de ellas es la siguiente:

Axiomas

M1[325] $q \dashv (p \dashv p)$

M2 $(((p \dashv q) \dashv r) \dashv q) \dashv ((q \dashv s) \dashv (p \dashv s))$

Reglas: Sustitución y separación (estricta).

Ofrece cierto interés el que en S5 podamos definir tanto L como M del modo siguiente[326]:

$$L\alpha = {}_{\mathrm{Df}}((\alpha \dashv \alpha) \dashv \alpha)$$
$$M\alpha = {}_{\mathrm{Df}}((\alpha \dashv L\alpha) \dashv L\alpha)$$

Lo que significa el decir que estas definiciones pueden darse en S5 es que *en S5* el que una fórmula sea tesis o no se ve afectado si sustituimos $L\alpha$ en cualquier lugar por $(\alpha \dashv \alpha) \dashv \alpha$, o a la inversa; y de modo análogo para M. En S4 funcionará la misma definición para L pero no la de M. En S3 y sistemas más débiles no servirá ninguna de las definiciones.

Hacking ha demostrado[327] que los siguientes conjuntos de axiomas (también aquí con la sustitución y la separación como únicas reglas) son suficientes para C3–C5.

---

321 Lewis [1912].

322 O a veces, de acuerdo con el símbolo de implicación material (*C*) de la notación polaca, *C-puro*

323 Lemmon, Meredith, Prior and Thomas [1957].

324 *Ibid.*, pág. 8; también Meredith [1956a], pág. 9.4; Meredith and Prior [1964].

325 La numeración es la de Prior [1961], pág. 61.

326 Meredith [1956a], pág. 1.1; Meredith and Prior [1964], pág. 204.

327 Hacking [1963]. *Vide* también Beth and Nieland [1965], págs. 22 y 24.

Axiomas comunes a los tres sistemas:

(1) $p \dashv p$
(2) $(p \dashv (q \dashv r)) \dashv ((p \dashv q) \dashv (p \dashv r))$

Para C3, añádase a 1 y 2:

C3.1 $(q \dashv r) \dashv ((p \dashv q) \dashv (p \dashv r))$
C3.2 $\alpha \dashv (\beta \dashv \alpha)$, si α y β son ambas fórmulas *estrictas*, es decir, tienen la forma $(\gamma \dashv \delta)$ siendo γ y δ fbfs.

Para C4, añádase a 1 y 2:

C4.1 $\alpha \dashv (p \dashv \alpha)$, si α es estricta.

Para C5, añádase a 1, 2 y C4.1:

C5.1 $((\alpha \dashv p) \dashv \alpha) \dashv \alpha$, si α es estricta.

Habiendo establecido estos sistemas C, como bien podemos denominarlos, podemos, si lo deseamos, ampliarlos mediante la adición de nuevos operadores, junto con axiomas apropiados. Prior da la siguiente base[328] para C5 + C-puro (es decir el fragmento de S5 en el que los únicos operadores son $\dashv$ y $\supset$, siendo ambos primitivos):

Axiomas

C′5.1 $(((p \dashv q) \dashv r) \dashv s) \dashv ((q \dashv s) \dashv (p \dashv s))$
C′5.2 $p \dashv (q \supset p)$
C′5.3 $(p \dashv (p \supset q)) \dashv (p \dashv q)$
C′5.4 $(p \dashv q) \dashv (p \supset q)$

Reglas

R1. Separación estricta
R2. $\vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (\alpha \dashv \beta)$
R3. Sustitución uniforme para variables
R4. Sustitución uniforme de $\supset$ para $\dashv$ en cualquier tesis.

Podemos obtener S5 completo añadiendo a esta base una proposición constante falsa (imposible), 0, y el axioma:

C′5.5 $0 \dashv p$

(Todos los demás operadores de S5 en su forma habitual pueden introducirse luego mediante definiciones).

Una base para S4 construida de modo semejante[329] se obtiene sustituyendo C′5.1 y C′5.2 por:

C′4.1 $(p \dashv q) \dashv (s \dashv ((q \dashv r) \dashv (p \dashv r)))$
C′4.2 $((p \supset q) \supset p) \dashv p$

Hacking también axiomatiza C2 y CT[330]. Y para cada uno de los sistemas com-

328 Prior [1961], [1963a].
329 Prior [1963a], pág. 3.
330 Hacking [1963], págs. 67-8.

pletos S2–S5 y T proporciona bases que empiezan con axiomas que contienen solamente $-\!\!\!\supset$ y luego añaden otros para $\sim$, $\cdot$ y $\vee$[331]. (En el caso de S3–S5, pero no en el de S2 o T, estos axiomas para $-\!\!\!\supset$ proporcionan precisamente los correspondientes sistemas C).

Otro operador modal que puede considerarse como primitivo es la equivalencia estricta. Al parecer, no se ha hecho trabajo alguno sobre cálculos de equivalencia estricta pura, pero ya en 1937 Huntington dio un conjunto de axiomas (en forma algebraica) para S2[332], considerando a la equivalencia estricta como operador primitivo y utilizando la definición:

$$L\alpha = {}_{\mathrm{Df}}(\alpha = (\alpha \vee \sim\alpha))$$

Un sistema equivalente a S4 con $=$ como único operador modal primitivo y L definida de un modo muy semejante al de Huntington es el siguiente[333]: Suponemos una axiomatización de CP que contiene la proposición constante falsa 0 y la definición

$$1 = {}_{\mathrm{Df}}(0 \supset 0)$$

A esto adjuntamos: $=$ como operador primitivo; la definición:

$$L\alpha = {}_{\mathrm{Df}}(\alpha = 1)$$

el esquema axiomático:

I. $(p = q) \supset (\alpha \supset \beta)$, difiriendo β de α sólo en tener q en algunos de los lugares en los que α tiene a p; y la regla:

R. $\vdash (\alpha \equiv \beta) \rightarrow \vdash (\alpha = \beta)$[334].

Señalábamos anteriormente que la raya Sheffer (/) de la negación alternativa puede utilizarse como el único operador primitivo para CP. Su análogo modal, negación alternativa estricta, puede simbolizarse mediante una doble raya (//): $p//q$ ha de entenderse como entenderíamos normalmente $\sim M(p \cdot q)$. Se han desarrollado sistemas en los que este operador ha sido considerado como primitivo y los otros operadores se han definido como sigue:

$$\begin{aligned}
(\alpha -\!\!\!\supset \beta) &= {}_{\mathrm{Df}}\ \alpha//(\beta/\beta) \\
(\alpha \supset \beta) &= {}_{\mathrm{Df}}\ \alpha/(\beta/\beta) \\
\sim\alpha &= {}_{\mathrm{Df}}\ \alpha/\alpha \\
(\alpha \vee \beta) &= {}_{\mathrm{Df}}\ (\alpha/\alpha)/(\beta/\beta) \\
(\alpha \cdot \beta) &= {}_{\mathrm{Df}}\ (\alpha/\beta)/(\alpha/\beta) \\
L\alpha &= {}_{\mathrm{Df}}\ (\alpha/\alpha)//(\alpha/\alpha) \\
M\alpha &= {}_{\mathrm{Df}}\ (\alpha//\alpha)/(\alpha//\alpha)
\end{aligned}$$

---

331 Op. cit., págs. 51, 66-67.

332 Huntington [1937].

333 Cresswell [1965], donde se sugiere que en este sistema = podría interpretarse como signo de identidad proposicional, y considerarse Lp con el significado de "p es idéntico a alguna verdad demostrable".

334 Sin la regla R no se pueden derivar diversos teoremas de S4 – incluyendo incluso $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$. Un intento anterior de definir la necesidad mediante el método utilizado en este sistema, el de Bronstein and Tartar [1934] es (como fue señalado por McKinsey [1934a]) insatisfactorio por esta razón.

Utilizando estas definiciones, Ishimoto da axiomas y reglas para S3 y S4[335].

Otro posible operador primitivo es la *contingencia.* Montgomery y Routley[335a] dan como notación ∇p para "es contingente que p" (es decir, para lo que normalmente se entendería mediante $\sim Lp \cdot Mp$), e investigan algunas bases en las que este operador es primitivo, así como algunas en las que la no contingencia es operador primitivo.

El sistema E

Los sistemas que hemos discutido hasta ahora en este capítulo han sido intentos de dar bases, utilizando diversos operadores primitivos distintos a los habituales, a sistemas ya existentes de lógica modal o a fragmentos de éstos. Por tanto no han implicado una ruptura radical con los sistemas "habituales" (standard) que discutimos previamente. Algunos lógicos, sin embargo, han opinado que incluso los más débiles de estos sistemas habituales contienen tesis que son en alguna forma objetables se han puesto a construir sistemas que no las contengan. Un motivo de disconformidad han sido las denominadas "paradojas de la implicación estricta". Incluso en S0.5 tenemos las siguientes tesis:

$$(1)\ q \dashv (p \vee \sim p)$$
$$(2)\ (p \cdot \sim p) \dashv q$$
$$(3)\ Lp \supset (q \dashv p)$$
$$(4)\ \sim Mp \supset (p \dashv q)$$

y en S2 también podemos demostrar

$$(5)\ Lp \dashv (q \dashv p)$$
$$(6)\ \sim Mp \dashv (p \dashv q)$$

A los ojos de algunos lógicos y filósofos, tesis tales como éstas hacen imposible interpretar $\dashv$ como "vincula" (entails) —es decir considerar a $p \dashv q$ significando "q se sigue lógicamente de p" —o al menos impiden que los sistemas en que aparecen sean cálculos adecuados de vinculación (entailment)[336].

Se han hecho varios intentos de construir sistemas en los que (1)–(6) y las fórmulas con ellas relacionadas no son tesis pero en los que hay un operador diádico que se comporta en otros aspectos como lo hace $\dashv$ en uno u otro de los cálculos modales habituales. De ellos el que ofrece mayor interés formal es uno basado en una relación que Ackermann denomina *strenge Implikation*[337] y Anderson y Belnap, que desarrollaron el sistema que se establece a continuación, denominan simplemente vinculación (entailment)[338]. Anderson y Belnap utilizan el símbolo primiti-

---

335 Ishimoto [1954], [1956a], [1956b]. Para un resumen de los axiomas y reglas *vide* Feys [1965], págs. 90-91.

335[a] Montgomery and Routley [1966].

336 Para una breve reseña de los problemas filosóficos suscitados aquí, *vide* Apéndice 2, págs. 274-277.

337 Ackermann [1956].

338 Para una relación bibliográfica *vide* Grover [1966].

vo → para representar esta relación y dan la siguiente base para el *cálculo puro de la vinculación*[339]:

Axiomas

$E_1$1 $p \rightarrow p$

$E_1$2 $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

$E_1$3 $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q))$

$E_1$4 $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$E_1$5 $((p \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q$

Reglas: Sustitución uniforme; Modus Ponens (para →). Se ha demostrado que estos axiomas son mutuamente independientes en el cálculo puro[340].

L puede ser introducida en este sistema mediante una definición análoga a la de C4 y C5:

$$L\alpha =_{\mathrm{Df}} ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)^{341}$$

El *sistema E* completo de Anderson y Belnap contiene operadores funcionales de verdad así como → y L (este último definido como anteriormente). Se deriva de los catorce axiomas siguientes, con sustitución, Modus Ponens (para →) y adjunción, como reglas de transformación[342].

Para la vinculación (entailment)

E1 $((p \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q$

E2 $((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

E3 $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$

Para la conjunción

E4 $(p \cdot q) \rightarrow p$

E5 $(p \cdot q) \rightarrow q$

E6 $((p \rightarrow q) \cdot (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \cdot r))$

Para la necesidad y la conjunción

E7 $(Lp \cdot Lq) \rightarrow L(p \cdot q)$

Para la disyunción

E8 $p \rightarrow (p \vee q)$

E9 $q \rightarrow (p \vee q)$

E10 $((p \rightarrow r) \cdot (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \vee q) \rightarrow r)$

---

339 Anderson and Belnap [1962b], págs. 39-40, donde, sin embargo, los autores utilizan esquemas de axiomas.

340 Anderson, Belnap, Wallace [1960].

341 Anderson and Belnap [1959a], pág. 109. Ackermann [1956] había introducido una proposición imposible constante ("das Absurde"), pero Anderson and Belnap muestran que ésta es redundante.

342 Anderson and Belnap [1962a], pág. 14; Anderson [1963], pág. 9.

Para la conjunción y la disyunción

E11 $(p \cdot (q \vee r)) \rightarrow ((p \cdot q) \vee r)$

Para la negación

E12 $(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$

E13 $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$

E14 $\sim\sim p \rightarrow p$

En este sistema las fórmulas paradójicas (1)–(6) –con $\rightarrow$ sustituyendo a $\supset$ en todos los lugares– no son derivables. Otra fórmula que no es demostrable es una que expresa el "silogismo disyuntivo", a saber:

$$((p \vee q) \cdot \sim p) \rightarrow q$$

De hecho, admitido el resto del sistema, podría decirse que es la ausencia del silogismo disyuntivo lo que impide que las "paradojas" sean teoremas[343]. *E* contiene, sin embargo, al cálculo proposicional completo, siendo $\supset$ definido del modo acostumbrado en términos de los demás operadores funcionales de verdad[344].

Entre las tesis importantes de E están[345]:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (Lp \rightarrow Lq)$$
$$(p \rightarrow q) \rightarrow L(p \rightarrow q)$$
$$Lp \rightarrow p$$
$$Lp \rightarrow LLp$$

También es posible derivar la regla $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$[346]. Consideradas en conjunto recuerdan bastante a S4. De hecho, E puede demostrarse que es un sub-sistema propio de S4, y que tiene las mismas modalidades irreductibles que S4 tiene[347].

Pueden darse definiciones sintácticas de completitud para E (en términos de la deducción natural[348]) y su completitud con relación a estas definiciones puede ser demostrada.

Sistemas sin el axioma de la necesidad

Una forma en la que un sistema se podría desviar de las condiciones del principio del capítulo 14 es no teniendo $Lp \supset p$ como tesis. Desde luego, en tanto que deseemos interpretar a *L* como operador de la necesidad no es probable que queramos prescindir de esta tesis, ya que una de las cosas básicas que deseamos decir acerca

---

343 Los que consideran el silogismo disyuntivo como un principio de vinculación (entailment) válido considerarán, por supuesto, su ausencia como objeción en contra de la pretensión de E de ser un cálculo de vinculación adecuado: de éstos algunos estarían dispuestos a admitir las "paradojas" si ése es el precio que hay que pagar por el silogismo disyuntivo; y algunos considerarían a las propias "paradojas" como principios válidos de vinculación, y por tanto considerarían la ausencia *de ellas* como base para objetar contra E. Pero nuevamente *vide* págs. 274-277.

344 Anderson and Belnap [1959b], pág. 302.

345 Anderson and Belnap [1962b], pág. 44.

346 Grover [1966], pág. 30.

347 Anderson and Belnap [1959a], pág. 108. Para una versión de E que corresponde a T, *vide* Goble [1966], págs. 205-207.

348 Anderson [1960]. Para una breve reseña de la deducción natural y su aplicación a la lógica modal *vide* Apéndice 1 *infra*, págs. 271-273.

de la necesidad es que lo qué es necesariamente verdadero *es* verdadero. Existen, sin embargo, otras posibles interpretaciones de L, algunas de las cuales harían razonable el abandonar $Lp \supset p$. Por ejemplo, se ha sugerido que podríamos considerar que Lp significa "debe ser el caso que p" (it ought to be the case...) o "es obligatorio que p". La correspondiente interpretación de Mp sería "es permisible que p". Se conservarían así las relaciones habituales entre L y M, ya que decir que algo es obligatorio es decir que no es permisible que sea omitido, y por tanto tenemos $Lp = \sim M \sim p$. Pero de acuerdo con esta interpretación no necesitaríamos tener $Lp \supset p$, que significaría que cualquier cosa que sea obligatoria existe, ni $p \supset Mp$ que significaría que cualquier cosa que se dé es permisible. Por otra parte $Lp \supset Mp$ –"cualquier cosa que sea obligatoria es permisible"– sigue siendo un principio seguro; y de hecho muchos sistemas de lógica modal que omiten $Lp \supset p$ lo sustituyen por la tesis más débil $Lp \supset Mp$ [349]). Una lógica en la que a los operadores modales (o a algunos de ellos) se les dé una interpretación moral de este tipo se denomina frecuentemente lógica *deóntica*[350]. Otro significado que podríamos dar a Lp que, por razones evidentes, nos llevaría a rechazar $Lp \supset p$ es "x cree que p".

Sistemas obtenidos a partir de S1–S5 simplemente abandonando el axioma de la necesidad (sin sustituirlo por ninguna tesis más débil) han sido estudiados por Feys[351] y denominados por él $S1^0$–$S5^0$. Sus propiedades formales son muy semejantes a las de los sistemas S1–S5 completos, excepto en lo concerniente a las relaciones entre proposiciones modalizadas y no modalizadas.

Sistemas sin el axioma de la necesidad han sido estudiados también por Sobociński[352], Thomas[353] y otros.

Sistemas sin ninguna tesis de la forma $L\alpha$

En 1957 E. J. Lemmon[354] propuso una serie de sistemas en los que pretendía que Lp fuese interpretado como "es científicamente pero no lógicamente cierto que p". Estos sistemas se diferencian de los que hemos considerado hasta ahora en que $L(p \supset p)$, por ejemplo, no es tesis de ninguno de ellos. Esto, desde luego, es lo que la pretendida interpretación nos llevaría a suponer, ya que, puesto que $p \supset p$ es lógicamente cierto, debe ser falso decir que es "científicamente pero no

---

349 Cf., por ejemplo, Lemmon [1957]. Los sistemas que omiten $Lp \supset p$ pueden estudiarse semánticamente siguiendo una sugerencia de Kripke [1963a] (pág. 95) y omitiendo la reflexividad en las condiciones de R. Siempre que entonces exijamos que para todo mundo exista otro que sea accesible a él (aunque no hace falta que sea él mismo) obtendremos una semántica para los sistemas en los que $Lp \supset p$ no se omite simplemente sino que se sustituye por $Lp \supset Mp$.

350 Lógicas deónticas más elaboradas a menudo contienen dos pares distintos de operadores modales, uno (por ejemplo L y M) interpretado según la forma habitual en términos de necesidad y posibilidad, el otro (pongamos por caso O y P) en términos de obligatoriedad y permisibilidad. Podemos entonces tener $Lp \supset p$ y $p \supset Mp$ como tesis, pero no sus contrapartes deónticas $Op \supset p$ y $p \supset Pp$ – aunque contaremos con $Op \supset Pp$. También podemos formular tesis relacionando los dos tipos de operadores, por ejemplo $Op \supset Mp$ ("cualquier cosa que sea obligatoria es posible"). La lógica deóntica, sin embargo, es una cuestión que en sí misma consideramos fuera del ámbito de este libro. Algunas referencias bibliográficas se encontrarán en Lemmon [1965a].

351 Feys [1950], [1965].

352 Sobociński [1962a], [1962b], [1962c], [1963].

353 Thomas [1962], [1963a], [1963b], [1963c], [1964b].

354 Lemmon [1957].

lógicamente cierto"[355]. De hecho estos sistemas de Lemmon no tienen ninguna tesis de la forma $L\alpha$ en absoluto[356].

Uno de los sistemas de Lemmon, al que él denomina E2, se forma añadiendo a CP los axiomas:

A1 $Lp \supset p$

A2 $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$

y la regla:

$$\mathbf{R1} \vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha \supset L\beta)$$

(en adición a la sustitución y la separación).

E2 está contenido en, pero no contiene a, S2. Vale la pena observar, sin embargo, que la regla R1 de E2 no es una regla del sistema más fuerte S2.

Otro de los sistemas de Lemmon (E3) es lo mismo que E2 pero con

A3 $L(p \supset q) \supset L(Lp \supset Lq)$

en sustitución tanto de A2 como de R1.

Desde un punto de vista semántico podemos caracterizar a E2 y a E3 como sigue: si definimos modelos como para S2 (S3) pero alteramos la definición de la validez de modo que α es válida SI en todo modelo S2(S3) $<$MU, R, V$>$, V$(\alpha, mu_i) = 1$ para *todo* $mu_i \in$ MU sea o no sea mu_i normal, entonces tenemos una definición de validez para E2 (E3)[357].

Un sistema sin la interdefinibilidad de L y M

Todos los sistemas que hemos discutido hasta ahora (siempre que contenían a L, M y $\sim$) han tenido las tesis $Lp = \sim M \sim p$ y $Mp = \sim L \sim p$. Diremos que en tales sistemas L y M son *interdefinibles*, esté o no esté cada uno de ellos definido explícitamente en términos del otro. Pasamos ahora a un sistema que no tiene esta característica. Es el sistema de Prior, Q, al que él definió en términos de una matriz en 1957[358] pero que no fue axiomatizado hasta más tarde.

Será más fácil comprender la matriz de Prior si tenemos en cuenta la interpretación que él hace de ella. Considera este autor a una proposición como algo que en un momento determinado puede ser o bien verdadero, o falso, o no decidible en absoluto; y una proposición dada puede pasar de un status a otro con el paso del tiempo. Podría darse el caso de que una proposición fuese verdadera en todos los momentos; o bien podría tener la propiedad más débil de ser verdadera *cuando quiera que fuera decidible* –es decir la de ser en todo momento o no decidible o verdadera– y tal proposición, aunque no siempre verdadera, no es por lo menos nunca falsa. En esta lógica una fórmula, α, se dirá que es válida SI cada sustitución

---

355 Esta interpretación, sin embargo, no parece ajustarse adecuadamente a los sistemas de Lemmon, ya que en todos ellos $Lq \supset L(p \supset p)$ es un teorema; y según la interpretación en cuestión esto significaría, "Si algo es científicamente pero no lógicamente cierto entonces $p \supset p$ es científicamente pero no lógicamente cierto" – lo cual es falso con absoluta seguridad.

356 Característica que comparten con Q y con el sistema modal $\not\perp$ que se discuten posteriormente.

357 *Vide supra* pág. 227. *Vide* también Kripke [1965b] para la completitud de estos sistemas.

358 Prior [1957], págs. 41-54.

concreta de sus variables da como resultado una proposición que no es nunca falsa, es decir que es siempre o no decidible o verdadera.

En las matrices que siguen podemos considerar a 1 representando la verdad, a 3 representando la falsedad y a 2 representando la no decidibilidad. Cada variable proposicional está asociada con una secuencia infinita de números, cada uno de los cuales es 1, 2 ó 3; éstos pueden considerarse representantes del status de la proposición en sucesivos puntos de tiempo. Dadas las secuencias para un conjunto de proposiciones, calculamos las secuencias de las diversas funciones de ellas como sigue:

Para las funciones de verdad seguimos las reglas ordinarias en lo que se refiere a 1 y a 3 y en el caso de 2 tenemos las reglas de que la negación de 2 es 2 y de que la conjunción de 2 y cualquier otra cosa es 2. Las otras funciones de verdad pueden definirse en términos de la negación y la conjunción según la forma acostumbrada.

Para L las reglas son[359]:

(a) Si la secuencia para α consta enteramente de 1s también ocurre así para $L\alpha$.

(b) Si la secuencia para α contiene algunos 2s, entonces $L\alpha$ tiene 2 siempre que α tiene 2, pero 3 en los demás lugares.

(c) Si la secuencia para α no contiene ningún 2 pero contiene algunos 3s, entonces la secuencia para $L\alpha$ consta enteramente de 3s.

Para M las reglas son:

(a) Si la secuencia para α no tiene ningún 1 en absoluto, entonces la secuencia para $M\alpha$ es la misma que para α.

(b) Si la secuencia para α contiene algún 1 *y* algún 2 (contenga o no contenga asimismo 3), entonces la secuencia para $M\alpha$ tiene 2 siempre que α tiene 2, pero 1 en todos los demás lugares.

(c) Si la secuencia para α contiene algún 1 pero no contiene ningún 2, entonces la secuencia para $M\alpha$ consta enteramente de 1s.

Una fbf, α, se dice que es válida en Q SI, independientemente de qué secuencias estén asociadas con las variables de α, la secuencia para la propia α no contiene ningún 3.

En Q, $Lp \supset \sim M \sim p$ y $Mp \supset \sim L \sim p$ son válidos pero sus inversas no lo son, por tanto no tenemos la equivalencia (ni material ni estricta) de Lp y $\sim M \sim p$, o de Mp y $\sim L \sim p$. Para ver por qué $Lp \equiv \sim M \sim p$ no es válido, considérese el caso en el que

	$p = 1, 2$ y sólo 2 a partir de aquí
entonces	$\sim p = 3, 2$ " " "" " " "
por tanto	$M \sim p = 3, 2$ " " "" " " "
por tanto	$\sim M \sim p = 1, 2$ " " "" " " "
pero	$Lp = 3, 2$ " " "" " " "
por tanto	$Lp \equiv \sim M \sim p = 3, 2$ " " "" " " "

[359] Op. cit. pág. 44.

Q ha sido axiomatizado por R.A. Bull como sigue[360]:
Alguna base completa para CP, más:

Q1 $\sim M \sim p \supset p$

Q2 $Lp \supset p$

Q3 $(Lp \cdot Lq) \supset L(p \cdot q)$

RQLa. $\vdash (\beta \supset \gamma) \rightarrow \vdash (\beta \supset \sim M \sim \gamma)$ siempre que β esté completamente modalizada y cada variable de β aparezca en γ.

RQLb. $\vdash (L\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \rightarrow \vdash (L\alpha \supset (\beta \supset \sim M \sim \gamma))$, siempre que β esté completamente modalizada y cada variable de β aparezca en α o en γ.

RQLc. $\vdash (L\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \rightarrow \vdash (L\alpha \supset (\beta \supset L\gamma))$, siempre que β esté completamente modalizada y cada variable de β aparezca en α o en γ.

Prior ha demostrado[361] que esta axiomatización es equivalente a la que él mismo había sugerido previamente como suficiente para Q.

Q no es por supuesto equivalente a ninguno de los sistemas de Lewis, sin embargo está contenido en S5, aunque no lo está en ninguno de los S1–S4.

Sistemas basados en cálculos proposicionales no clásicos

Los sistemas considerados hasta ahora han contenido, como parte no modal, el cálculo proposicional bivalente clásico –es decir CP tal como se describió en el Capítulo 1. Existen, sin embargo, otros cálculos proposicionales además de éste, y han sido basados algunos sistemas modales en por lo menos uno de ellos, el *cálculo intuicionista* (CI).

En CI, $\sim$, $\vee$, $\cdot$ y $\supset$ son todos operadores primitivos y las tesis son las fórmulas derivables de los siguientes axiomas mediante sustitución y separación[362]:

H1 $p \supset (p \cdot p)$

H2 $(p \cdot q) \supset (q \cdot p)$

H3 $(p \supset q) \supset ((p \cdot r) \supset (q \cdot r))$

H4 $((p \supset q) \cdot (q \supset r)) \supset (p \supset r)$

H5 $p \supset (q \supset p)$

H6 $(p \cdot (p \supset q)) \supset q$

H7 $p \supset (p \vee q)$

H8 $(p \vee q) \supset (q \vee p)$

H9 $((p \supset r) \cdot (q \supset r)) \supset ((p \vee q) \supset r)$

H10 $\sim p \supset (p \supset q)$

H11 $((p \supset q) \cdot (p \supset \sim q)) \supset \sim p$

CI es más débil que el CP bivalente clásico. Su característica más sorprendente es que ni $p \vee \sim p$ ni $\sim\sim p \supset p$ son tesis. Sin embargo sí tenemos $\vdash_{CI} (p \supset \sim\sim p)$.

El S5 intuicionista –es decir un sistema análogo a S5 pero con CP sustituido

360 Bull [1964b].
361 Prior [1964a]. La axiomatización anterior está en Prior [1959].
362 Heyting [1930].

por CI– puede ser axiomatizado[363] añadiendo a CI los operadores L y M y los siguientes axiomas y reglas:

LH1 $Lp \supset p$

MH1 $p \supset Mp$

LH2 $\vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (\alpha \supset L\beta)$, siempre que α esté completamente modalizada.

MH2 $\vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (M\alpha \supset \beta)$, siempre que β esté completamente modalizada.

Existen también conexiones de un tipo distinto entre los cálculos proposicionales no clásicos y los sistemas modales. En particular se ha demostrado que CI presenta una gran semejanza estructural con S4. En 1948 McKinsey y Tarski mostraron cómo convertir cualquier fórmula, α, de CI en una fórmula modal, $T(\alpha)$, que sea tesis de S4 SI α es tesis de CI[364]. Las reglas para esta conversión son como sigue:

T1 Si α es una variable proposicional, entonces $T(\alpha)$ es $L\alpha$.

T2 $T(\alpha \vee \beta) = T(\alpha) \vee T(\beta)$

T3 $T(\alpha \cdot \beta) = T(\alpha) \cdot T(\beta)$

T4 $T(\alpha \supset \beta) = T(\alpha) \dashv T(\beta)$

T5 $T(\sim\alpha) = \sim M(T(\alpha))$

La correspondencia así establecida entre S4 y CI sugiere el proyecto de partir de otros sistemas modales e intentar correlacionar los cálculos proposicionales con ellos mediante las mismas reglas T1–T5. Tales cálculos proposicionales han sido construidos e investigados para S4.2 y S4.3[365]. También se ha mostrado que el cálculo proposicional que corresponde de esta forma a S5 es el CP bivalente ordinario[366].

El sistema modal Ł

Un modo de axiomatizar CP es utilizar el único axioma[367]:

$$(1)\quad \delta p \supset (\delta \sim p \supset \delta q)$$

Aquí δ es una "variable funcional": los valores de δp son todas aquellas expresiones bien-formadas que tengan p como constituyente –por ejemplo la propia p, $p \supset q$, $(p \supset p) \supset p$ y así sucesivamente. Utilizando una regla de sustitución uniforme para variables funcionales así como proposicionales, y la regla ordinaria de la separación, puede derivarse de (1) la totalidad del CP bivalente ordinario[368]

---

363 Prior [1957], pág. 38; Bull [1965b], pág. 142 [1966b]. Para un sistema modal basado en una lógica trivalente *vide* Segerberg [1967].

364 McKinsey y Tarski [1948] págs. 13-14. Este tipo de relación también se examinaba en Becker [1930] y Gödel [1933]. (*Vide* Rescher [1966]. Para el cálculo de predicados intuicionista *vide* Kripke [1965a].

365 Dummett and Lemmon [1958].

366 *Ibid.*, págs. 263-264.

367 Łukasiewicz [1951].

368 Como alternativas de (1) podríamos utilizar el esquema de axioma:

$$\alpha \supset (\beta \supset \gamma)$$

donde α, β y γ difieren únicamente en que en algunos lugares donde α tiene p, β tiene $\sim p$ y γ tiene q. De este modo podríamos prescindir de las variables funcionales. Cf. Smiley [1963], pág. 128.

Al desarrollar CP de este modo, desde luego, consideramos que el alcance de los valores de δ es las funciones de verdad únicamente. Pero en 1953 Łukasiewicz propuso un sistema, con (1) como axioma, en el que δ podía tomar valores modales así como también funcionales de verdad[369]. A éste le denominó sistema modal Ł. Sus axiomas son:

Ł1 $\delta p \supset (\delta \sim p \supset \delta q)$

Ł2 $p \supset Mp$

y sus reglas son la sustitución uniforme para variables proposicionales y funcionales y la separación material. El operador L se introduce mediante la conocida definición:

$$L\alpha =_{\mathrm{Df}} \sim M \sim \alpha$$

de tal modo que L y M guardan la misma relación entre sí que en los demás sistemas (menos en Q).

En virtud de Ł1, el sistema modal Ł contiene la totalidad del cálculo proposicional, pero posee algunas notables propiedades en marcado contraste con otros sistemas modales. Mencionamos unas cuantas de ellas.

1. A diferencia de cualquiera de los sistemas de Lewis (y a diferencia de Q) posee una matriz característica finita. De hecho una fbf es un teorema del sistema modal Ł SI satisface la matriz tetravalente dada a continuación[370]. El valor designado es 1, y por razones de conveniencia hemos calculado la tabla para L a partir de las de $\sim$ y M.

		β						
	$\supset$	1	2	3	4	$\sim$	M	L
α	1	1	2	3	4	4	1	2
	2	1	1	3	3	3	1	2
	3	1	2	1	2	2	3	4
	4	1	1	1	1	1	3	4

2. Al igual que los sistemas E de Lemmon, pero a diferencia de los demás sistemas, el sistema modal Ł no tiene ninguna tesis de la forma $L\alpha$. De hecho, llega más lejos incluso que Q en esta cuestión, en que ninguna proposición en absoluto de la forma Lp toma jamás el valor designado, como deja claro la matriz acabada de dar. Prior señaló esto diciendo que en el sistema modal Ł "no existen proposiciones individuales de la forma Lp"[371]

3. El sistema modal Ł tiene exactamente seis modalidades irreductibles. Son las seis mismas que tiene S5, pero las leyes de reducción son distintas; mientras que en S5 todos los operadores de una secuencia ininterrumpida de Ls y/o Ms podían suprimirse menos el último, en el sistema modal Ł pueden suprimirse todos menos

---

369 Łukasiewicz [1953].

370 Esta matriz aparece en Łukasiewicz [1953] y se demuestra que es característica del sistema modal Ł de Smiley [1961]. Para una demostración de que ninguno de los sistemas Lewis tiene una matriz finita característica, *vide* Dugundji [1940].

371 Prior [1957], pág. 42.

el *primero*[372]. De este modo $LM\alpha$ es equivalente no a $M\alpha$ sino a $L\alpha$, y así sucesivamente.

4. Como hemos mostrado en capítulos anteriores, T, S4 y S5 contienen la regla N ($\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$); S6–S8 contienen la tesis *MMp* que es incompatible con N; y S1–S3 no contienen ni N ni $\vdash MMp$, pero son compatibles con cualquiera de ellas. El sistema modal Ł se asemeja a S1–S3 en que no contiene ni N ni $\vdash MMp$; pero se diferencia de todos estos sistemas en que es positivamente inconsistente con cada uno de ellos[373].

5. La "no ortodoxia" completa del sistema modal Ł no aparece, sin embargo, hasta que no consideramos algunas de sus tesis. Una de ellas es:

$$(2)\ (Mp \cdot Mq) \supset M(p \cdot q)$$

que significa que dos proposiciones posibles cualesquiera son consistentes entre sí. Otra, obtenida directamente mediante la sustitución de δ en Ł1 por *M* es:

$$(3)\ Mp \supset (M \sim p \supset Mq)$$

que significa que si una proposicion y su negacion son ambas posibles, entonces cualquier proposición es posible. Una tercera es:

$$(4)\ (p \equiv q) \supset (Mp \supset Mq)$$

que significa que si dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad, entonces si una es posible también lo es la otra. Tesis tales como éstas muy bien pudieran parecer contra-intuitivas[374] –aunque quizá la conclusión más correcta que podríamos sacar a partir de su presencia es que en este sistema *M* representa un sentido de "posible" distinto de todos los que hemos encontrado al interpretar otros sistemas.

¿Cuál podría ser este sentido de "posible"? Łukasiewicz[375] dice que él considera *Mp* y *Lp* como *funciones de verdad* de *p*, y esto desde luego parece estar de acuerdo con el uso al que destina Ł1 en su sistema. Pero no son, como él mismo admite, operadores de verdad ***bivalentes***, ya que sólo hay cuatro operadores monádicos de verdad bivalentes y ni *M* ni *L* pueden identificarse con ninguno de ellos. En el sistema Ł modal *Mp* no es *p*, porque $Mp \supset p$ no es un teorema; *Mp* no es $\sim p$, porque $Mp \supset \sim p$ no es un teorema; *Mp* no es $(p \supset p)$, ya que $(p \supset p) \supset Mp$ no es un teorema; y *Mp* no es $(p \cdot \sim p)$, ya que $Mp \supset (p \cdot \sim p)$ no es un teorema. (Estos resultados pueden comprobarse fácilmente mediante la matriz). Por razones semejantes *Lp* no es ninguna de estas funciones de verdad tampoco. El propio punto de vista Łukasiewicz es que *M* y *L* son operadores funcionales de verdad en una lógica tetravalente. Prior, sin embargo, ha señalado[376] que podemos considerarlos como operadores-***variables***, con un alcance cada uno de ellos de dos operadores monádicos del CP bivalente ordinario. Siendo el alcance de *Mp*, *p* y $(p \supset p)$ y el de *Lp*, *p* y $(p \cdot \sim p)$. Lo que esto viene a significar es esto: Sea α cualquier fbf que contenga una o más apariciones de *M* (habiendo sido eliminadas todas las apariciones de *L* mediante Def *L*); sea α', α con *M* suprimida en todas partes; y sea α'', α con todas las sub-fórmulas de la forma $M\beta$ sustituidas por $(\beta \supset \beta)$; entonces α es una tesis del sistema modal Ł SI tanto $\vdash_{CP} \alpha'$ como $\vdash_{CP} \alpha''$.

---

372 Prior [1957], pág. 126.

373 Prior [1957], pág. 126.

374 Aunque no es así, al parecer, para Łukasiewicz, ya que en [1953] pág. 122 asegura que (4) es "intuitivamente evidente". Y en 1951 –cuando no estaba trabajando en absoluto dentro del sistema modal Ł– asegura que (3) es un principio válido porque es derivable de (1).

375 Łukasiewicz [1953], pág. 113.

376 Prior [1954], pág. 204; [1957], pág. 4. (*Vide* también Kripke [1965b], pág. 210).

Así pues M y L en el sistema modal $\mathcal{L}$ realmente parecen expresan sentidos de "posibilidad" y "necesidad" considerablemente distintos de cualquiera de los habituales; y tal vez, si por "lógica modal" entendemos una lógica de la posibilidad y la necesidad, este sistema nos lleve al límite de lo que pudiéramos considerar en algún modo lógica modal. A pesar de ello comparte con los sistemas modales "ordinarios", tales como los de Lewis, las siguientes características formales básicas: (a) contiene una lógica proposicional habitual (standard) (de hecho CP); y (b) tiene dos operadores monádicos, M y L que son tales que (i) no pueden ser identificados con ningún operador de CP (ii) Mp es más débil que p, en el sentido de que $p \supset Mp$ es una tesis pero $Mp \supset p$ no lo es, y Lp es más fuerte que p en el sentido de que $Lp \supset p$ es una tesis pero $p \supset Lp$ no lo es, y (iii) $Lp \equiv \sim M \sim p$ y $Mp \equiv \sim L \sim p$ son tesis.

CAPITULO XVII

ALGEBRA BOOLEANA Y LOGICA MODAL

Señalamos anteriormente que los sistemas modales han sido estudiados de tres principales modos: axiomáticamente, semánticamente y algebraicamente. Este libro se ha concentrado en los dos primeros métodos, pero ahora damos una breve explicación del tercero[377]. Limitaremos nuestra atención, casi por completo, a un solo sistema; sin embargo otros varios sistemas han sido investigados de este modo, y en algunos casos las modificaciones necesarias para tratarlos son del todo simples y directas.

Algebras Booleanas

La aproximación algebraica a la lógica modal está basada en una correspondencia entre diversos sistemas modales y ciertas estructuras matemáticas conocidas como *álgebras Booleanas*[378]. Un álgebra Booleana consta de un conjunto (K) de objetos, a, b, c, ..., denominados *elementos*, junto con ciertas operaciones (o funciones) cuyos argumentos son miembros de K y cuyos valores son igualmente miembros de K. Los miembros de K pueden ser cualquier cosa que queramos, pero es común considerarlos como siendo ellos mismos conjuntos de objetos y considerar las operaciones como modos de construir nuevos conjuntos a partir de los ya existentes. Un álgebra Booleana debe contener un operador monádico que escribiremos como $-$, y uno diádico, que escribiremos como $\times$, y debe satisfacer las siguientes condiciones (a menudo denominadas *postulados*)[379]:

1.1 K contiene como mínimo dos elementos.

1.2 Si $a, b \in K$[380] entonces $-a \in K$ y $(a \times b) \in K$.

1.3 Si $a, b \in K$, entonces $(a \times b) = (b \times a)$[381]

1.4 Si $a, b, c \in K$, entonces $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

1.5 Para todo $a, b \in K$, si existe algún $c \in K$ tal que $(a \times -b) = (c \times -c)$, entonces $(a \times b) = a$.

---

377 Un estudio más completo se encuentra en Lemmon [1966a] y [1966b].

378 Las álgebras Booleanas se denominan así en atención al lógico y matemático del siglo diecinueve, George Boole, que las investigó sistemáticamente por primera vez. La publicación en 1847 de su *Mathematical Analysis of Logic* se considera a menudo que marca el comienzo de la moderna lógica formal.

379 Estas condiciones aparecen en Stoll [1961], págs. 176-7. Stoll las deriva de los postulados de Huntington [1904], dadas las definiciones de + y 0. Se conocen otros diversos conjuntos de postulados, equivalentes.

380 "$a, b \in K$" significa que a y b son ambos miembros de K.

381 "$a = b$" significa que a y b son el mismo elemento del álgebra.

1.6 Para todo $a, b, c \in K$, si $(a \times b) = a$, entonces $(a \times -b) = (c \times -c)$.

Es conveniente añadir las siguientes definiciones:

$$[0] \quad 0 =_{Df} (a \times -a)$$
$$[1] \quad 1 =_{Df} -0^{382}$$
$$[+] \quad (a + b) =_{Df} -(-a \times -b)$$
$$[\subset] \quad (a \subset b) =_{Df} (a \times b) = a$$

Por tanto podemos definir un álgebra Booleana como un conjunto ordenado de tres miembros $<K, -, \times>$, en el que K es un conjunto de elementos; $-$ y $\times$ representan respectivamente operaciones monádicas y diádicas con aquellos elementos, y se satisfacen los postulados establecidos anteriormente. Puesto que K puede contener cualquier número de elementos (mayor que 1) existe un número indefinido de álgebras Booleanas. Cuando hablemos de una fórmula como teorema de un álgebra Booleana *simpliciter* querremos significar que es válida en todas las álgebras Booleanas, cualquiera que sea el número de elementos de K[383].

La operación simbolizada por $\times$ se denomina a menudo *multiplicación*; y se dice que $(a \times b)$ es el *producto* o *intersección* de a y b. La operación simbolizada por $+$ se denomina a menudo *adición*; y se dice que $(a + b)$ es la *suma* o *unión* de a y b. Se dice que $-a$ es la *negación* o *complemento* de a. $a \subset b$ se puede leer como "a está incluida en b"[384].

Si los elementos son conjuntos de objetos, entonces $a \times b$ es el conjunto de cosas que son a la vez miembros de a y miembros de b, $-a$ es el conjunto de todas aquellas cosas (es decir todas aquellas cosas de cualquier miembro de K) que no están en a, y $a + b$ es el conjunto de todas aquellas cosas que son o miembros de a o miembros de b (o ambas cosas), 0 es el conjunto vacío (o nulo) y 1 (el conjunto universal) es el conjunto que contiene todo lo que esté en cualquier miembro de K. Según esta interpretación una ecuación afirma identidad de miembros; es decir decimos que $a = b$ SI a y b tienen exactamente los mismos miembros.

En una interpretación espacial, por ejemplo cuando los elementos sean áreas en un plano, podemos hablar de los puntos que constituyen esas áreas cuando en la interpretación anterior hablábamos de miembros de conjuntos. Pero no hace falta dedicar más tiempo a los detalles de las diversas interpretaciones.

Enumeramos ahora (aunque sin pruebas[385]) unos cuantos importantes teoremas del álgebra Booleana para futura referencia:

---

382 1 puede denominarse el elemento *unidad* (unit) o *universal* del álgebra y 0 el elemento *nulo*.

383 Como ejemplos de álgebras Booleanas podemos citar las matrices del Capítulo 13 utilizadas para demostrar que los sistemas Lewis eran distintos. En la mayoría de ellas K tiene cuatro miembros, los números 1-4 (es decir K = {1, 2, 3, 4}) y las tablas de $\sim$ y . determinan funciones que satisfacen las condiciones de $-$ y $\times$ respectivamente.

384 Varias notaciones alternativas son comunes. Así pues $a \times b$ se escribe a veces como $a \cap b$, $a \,.\, b$ o simplemente ab; $a + b$ como $a \cup b$; $-a$ como $\bar{a}$ o a'; $a \subset b$ como $a \subseteq b$ o $a \leqslant b$; 0 como Z (cero en inglés es "zero". Nota de la Tr.), Λ o ϕ; 1 como V.

385 Pruebas de algunos de estos teoremas y una explicación más detallada de toda la materia se encuentran en cualquier introducción habitual al álgebra Booleana. *Vide*, por ejemplo, Stoll (op. cit.); Rasiowa and Sikorski [1963].

B1 $a = --a$

B2 $-(-a \times -b) = a + b$ }

B3 $-(-a + -b) = a \times b$ } Leyes de De Morgan

B4 $-a \times -b = -(a + b)$ }

B5 $-a + -b = -(a \times b)$ }

B6 $-a + b = 1$ si $a \subset b$

B7 $-a + a = 1$

B8 $a \times a = a$

B9 $a + a = a$

B10 $-1 = 0$

B11 $0 + a = a$

B12 $a \subset 1$

B13 $((a + -b) \times (b + -a)) = 1$ si $a = b$

B14 $(a \times b) \subset a$

B15 $a \subset (a + b)$

B16 $(a \times b) + c = (a + c) \times (b + c)$

B17 $(a + b) \subset c$ si $a \subset c$ y $b \subset c$

B18 Si $a \subset b$ y $b \subset c$ entonces $a \subset c$

B19 Si $a \subset b$ y $b \subset a$ entonces $a = b$

B20 Si $a \subset b$ y $c \subset d$ entonces $(a + c) \subset (b + d)$

En estos teoremas, a, b, ... han de entenderse como miembros de K.

Cuando K tiene sólo un número finito de elementos, se dice que $<K, -, \times>$ es un *álgebra Booleana finita*, y cuando K tiene un número infinito de elementos, se dice que $<K, -, \times>$ es un *álgebra Booleana infinita.* Definimos ahora un átomo de un álgebra Booleana finita como sigue[386]:

a es un átomo SI (i) $a \neq 0$ y (ii) para todo $b \in K$, si $b \subset a$ entonces o bien $b = a$ o $b = 0$.

(El modo más fácil para comprender esta definición es considerar los elementos como conjuntos. Entonces a lo que equivale la definición es a esto: para que un conjunto sea un átomo, (i) no debe estar vacío, y (ii) el único conjunto que puede ser incluido en él (aparte del conjunto vacío) debe ser él mismo. Según esta interpretación los átomos deben ser considerados como conjuntos unitarios (unit sets), es decir conjuntos con exactamente un miembro. Los complementos de los átomos se denominan a veces *primos*).

En cualquier álgebra Booleana finita $<K, -, \times>$ existe un conjunto (finito) $\{a^1, ..., a^n\}$, que consta de todos los átomos de K, y los siguientes principios son válidos.

B21 Cada elemento no nulo de K es la suma de un conjunto único de átomos determinado.

B22 $(a^1 + ... + a^n) = 1$.

B23 Para cualquier a, $b \in K$, si b es la suma de todos los átomos que están incluidos en a, entonces $a = b$.

386 Cf. Stoll, op. cit., pág. 188.

B24 Cuando n es el número de átomos de K, el número de elementos de K es 2^n.

Pudiera también existir un número infinito de átomos en K; en ese caso $<K, -, x>$ será por supuesto un álgebra Booleana infinita. Pero no toda álgebra Booleana infinita es tal que sus elementos se compongan de átomos en absoluto.

El álgebra Booleana y el CP

Podemos establecer una relación entre un álgebra Booleana $<K, -, x>$ y el Cálculo Proposicional del siguiente modo: Dada una fbf de CP, asignamos a cada variable de ella algún miembro de K (Si, por ejemplo, se asigna a a p, escribimos "V $(p) = a$"). Luego evaluamos la totalidad de la fórmula mediante las siguientes reglas:

1. Si $V(\alpha) = a$, entonces $V(\sim\alpha) = -a$;
2. Si $V(\alpha) = a$, y $V(\beta) = b$, entonces $V(\alpha \cdot \beta) = a \times b$.

Puesto que toda fbf de CP puede expresarse en términos de $\sim$ y $\cdot$, podemos de este modo asignar algún miembro de K a cualquier fbf[387]. Decimos que un álgebra $<K, -, x>$ *verifica* a una fbf, α, SI para cada asignación a partir de miembros de K a las variables de α, $V(\alpha) = 1$; y decimos que el álgebra *falsifica* a α SI no la verifica, es decir SI existe alguna asignación a las variables para la que $V(\alpha) \neq 1$. Puede demostrarse (aunque no lo demostraremos aquí) que una fbf de CP es válida SI es verificada por toda álgebra Booleana[388].

Algebras Booleanas con adición de operadores

Es posible ampliar las álgebras Booleanas del tipo que hemos descrito añadiendo nuevos operadores, y algunas de las álgebras así formadas conducen a modelos matemáticos para diversos sistemas de la lógica modal. Siguiendo a McKinsey[389], añadimos a un álgebra Booleana $<K, -, x>$ el operador monádico * con los siguientes postulados adicionales:

2.1 Si $a \in K$, entonces $*a \in K$.

2.2 Si $a \in K$, entonces $a \subset *a$.

2.3 Si $a, b \in K$, entonces $*(a + b) = (*a + *b)$.

2.4 $*0 = 0$.

En adición a estos postulados podemos añadir también:

3.1 Si $a \in K$, entonces $*a = **a$.

o

3.2 Si $a \in K$, entonces $*a = 1$ a menos que $a = 0$[390].

---

387 Obsérvese que en vista de la definición de +, si $V(\alpha) = a$ y $V(\beta) = b$, entonces $V(\alpha \vee \beta) = a + b$; es decir + representa a v al igual que x representa a $\cdot$

388 *Vide*, por ejemplo, Stoll (op. cit.) pág. 194. De hecho podemos ir más lejos y decir que una fbf de CP es valida SI se verifica en el álgebra Booleana de dos elementos, a saber aquélla en la que $K = \{1, 0\}$, $-a$ es $1 - a$ (sustracción artimética) y $a \times b$ es el producto (aritmético) de a y b.

389 McKinsey [1941].

390 *Vide* Scroggs [1951].

A un álgebra que satisfaga 1.1–2.4 la denominamos *álgebra-T*, a una que satisfaga también 3.1 *álgebra-S4*, y a una que satisfaga 1.1–2.4 y 3.2 *álgebra-S5*[391].

A las álgebras-T se les ha denominado *álgebras de extensión*[392] y a las álgebras-S4 *álgebras de clausura*[393].

En este capítulo demostraremos unos cuantos resultados concernientes a las álgebras-T. Pueden extenderse estos resultados de un modo completamente directo para ser aplicados a las álgebras S4 y S5, pero dejaremos para el lector la tarea de hacerlo. Muchos de los resultados también son válidos para álgebras que pueden vincularse de modo semejante con la mayor parte de los restantes sistemas modales considerados en los capítulos precedentes[394].

Las álgebras Booleanas y el sistema T

Para nuestros presentes propósitos será conveniente utilizar una versión de T en la que los operadores primitivos son $\sim$, $\cdot$ y M, y utilizar los axiomas del sistema M de Von Wright, cuya equivalencia deductiva con T demostramos en la pág. 111 y s. Denominaremos al sistema, sin embargo, T, en todas las ocasiones.

Podemos establecer una relación entre un álgebra Booleana $<K, -, x, *>$ y T del mismo modo que lo hicimos para CP, pero con la regla adicional de que si $V(\alpha) = a$, entonces $V(M\alpha) = *a$. Tenemos, entonces, una vez más, la posición de que para toda álgebra $<K, -, x, *>$ y para toda fbf, α, de T, la asignación a cada variable de α de algún miembro de K determina la asignación a α de algún miembro de K. Decimos nuevamente que el álgebra verifica a α SI para cada una de tales asignaciones a las variables, $V(\alpha) = 1$; y definimos de modo análogo la falsificación que realiza un álgebra.

TEOREMA I

Toda álgebra-T $<K, -, x, *>$ *verifica toda tesis de T*[395].

PRUEBA

La prueba se realiza mostrando que todos los axiomas de T son verificados por toda álgebra T y que las reglas de transformación conservan la propiedad de que sean así verificados.

1. A partir del hecho de que $<K, -, x>$ es un álgebra Booleana ordinaria se sigue que $<K, -, x, *>$ verifica los axiomas CP.

2. Los axiomas modales son $p \supset Mp$ y $M(p \vee q) \equiv (Mp \vee Mq)$. Los consideramos uno por uno.

(i) Supóngase que $p \supset Mp$ resulta falsificado por un álgebra-T $<K, -, x, *>$

---

391 La prueba ofrecida en la pág. 203 de que el axioma S5 es independiente de la base de S4 se realiza construyendo un álgebra S4 finita que no es un álgebra S5.

392 *Vide* Lemmon [1960a].

393 *Vide* McKinsey and Tarski [1944]. El término "álgebra de clausura" se deriva de la aplicabilidad de las álgebras S4 a ciertos problemas de la topología. Cuando, como en topología, el espacio se considera en términos de conjuntos de puntos, las formulaciones algebraicas de este tipo resultan beneficiosas.

394 *Vide* Lemmon [1966a], [1966b]. Para un estudio algebraico del cálculo de predicados modal *vide* Rasiowa and Sikorski [1963], págs. 481-488.

395 Este teorema se demuestra en Lemmon [1960a] para T, utilizando el procedimiento de McKinsey [1941] para S2. Aunque en lo esencial estamos utilizando las pruebas de estos autores no siempre seguimos su terminología.

cuando $V(p) = a$. Entonces tenemos:

$$-a + *a \neq 1$$

y por tanto, de acuerdo con B6:

$$a \not\subset *a$$

en contradicción con 2.2.

(ii) Supóngase que $M(p \vee q) \equiv (Mp \vee Mq)$ resulta falsificado cuando $V(p) = a$ y $V(q) = b$. Entonces, escribiendo nuevamente $M(p \vee q) \equiv (Mp \vee Mq)$ como $(\sim M(p \vee q) \vee (Mp \vee Mq)) \cdot (\sim (Mp \vee Mq)) \vee M(p \vee q))$, tenemos:

$$(- *(a + b) + (*a + *b)) \times (-(*a + *b) + *(a + b)) \neq 1$$

Por tanto de acuerdo con 2.3

$$(- *(a + b) + *(a + b)) \times (-(*a + *b) + (*a + *b)) \neq 1$$

y por tanto, de acuerdo con B7 $(-a + a = 1)$:

$$1 \times 1 \neq 1$$

que está en contradicción con B8 $(a \times a = a)$.

3. La regla de sustitución evidentemente conserva la propiedad, ya que si $V(\alpha) = 1$ para *toda* asignación de los miembros de K a una variable, pongamos p, de α, entonces puesto que toda fbf, β, tiene asignado algún miembro de K, también tendremos $V(\alpha[\beta/p]) = 1$.

Para el Modus Ponens, supóngase $V(\alpha) = a$ y $V(\beta) = b$; entonces si $a = 1$ y $-a + b = 1$, tenemos $-1 + b = 1$, por tanto (de acuerdo con B10) $0 + b = 1$, y por tanto (de acuerdo con B11) $b = 1$.

Para la regla $\vdash (\alpha \equiv \beta) \rightarrow \vdash (M\alpha \equiv M\beta)$, supóngase que $V(\alpha \equiv \beta) = 1$ (es decir, de acuerdo con Def $\equiv$, que $V((\sim \alpha \vee \beta) \cdot (\sim \beta \vee \alpha)) = 1$); entonces cuando $V(\alpha) = a$ y $V(\beta) = b$, B13 proporciona $a = b$. Por tanto $*a = *b$; y por tanto de acuerdo con B13 y nuevamente Def $\equiv$, $V(M\alpha \equiv M\beta) = 1$.

Finalmente para la regla de la Necesariedad (N), supóngase $V(\alpha) = 1$; entonces tenemos

$$\begin{aligned} V(L\alpha) &= - * - 1 \\ &= - *0 && \text{(de acuerdo con B10)} \\ &= - 0 && \text{(de acuerdo con 2.4)} \\ &= 1 && \text{(de acuerdo con Def 1)} \end{aligned}$$

Por tanto, toda álgebra T verifica todo teorema de T. Por otra parte, muchas álgebras T también verifican muchas fórmulas que no son teoremas de T. Un álgebra que verifica todas las fórmulas que son Teoremas de T y *ningunas otras* se conoce como álgebra T *característica*[396]. No se sigue inmediatamente, por supuesto, el que para un sistema dado exista un álgebra característica. Sin embargo podemos demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA II

Existe un álgebra T que verifica únicamente tesis de T (y por tanto es un álgebra T característica).

396 Cf. McKinsey op. cit., pág. 122.

Para demostrar este teorema[397] primero mostramos cómo construir un álgebra determinada $<K, -, \times, *>$ y luego mostramos (i) que es un álgebra T y (ii) que falsifica toda fbf que no sea tesis de T.

En un álgebra Booleana los elementos de K pueden ser cualquier tipo de objetos que deseemos –considerarlos conjuntos, como se hace ordinariamente, es por completo indiferente respecto a sus propiedades formales. En el álgebra que vamos a construir, haremos que los elementos de K sean ciertas *fbfs de T*. Más exactamente, K será un conjunto infinito propio de las fbfs de T. Seleccionamos las fbfs que han de estar en K mediante el método de Lindenbaum (*vide* nota 144). Suponemos que las fbfs de T están en algún orden habitual y ponemos en K toda fbf, α, *a menos que* exista alguna fbf, α', anteriormente en la ordenación, que esté en K y que sea tal que $\vdash_T (\alpha \equiv \alpha')$. Dicho de otro modo: podemos considerar a las fbfs de T agrupadas en conjuntos, constando cada conjunto de todas aquellas y sólo aquellas fórmulas que sean equivalentes (en T) a una fórmula dada (y por consiguiente equivalentes entre sí). Supóngase que $\alpha_1, ..., \alpha_i, ...$ son los miembros de tal conjunto, apareciendo en ese orden en la ordenación habitual: entonces tomamos α_1 y la introducimos en K dejando a los demás miembros fuera. (Diremos que α_1 *representa* en K a cada uno de los $\alpha_1, ..., \alpha_i, ...$). Tratamos a todos los demás conjuntos de este tipo del mismo modo; y para la fórmula de K que represente a una fórmula, α, utilizamos la notación α'. Como resultado:

1. No existen dos fórmulas en K equivalentes entre sí.
2. Para cualquier fbf, α, que no esté en K, existe alguna fbf, α', en K tal que $\vdash_T (\alpha \equiv \alpha')$.
3. Si $\vdash_T (\alpha \equiv \beta)$, entonces α y β estarán representadas por una sola fórmula en K; es decir α' y β' serán la misma fórmula.
4. A la inversa, si α' y β' son la misma fórmula, entonces $\vdash_T (\alpha \equiv \beta)$; y por tanto (puesto que Eq es válido en T) α y β son intersustituibles en cualquier teorema. Más aún, puesto que $\vdash_T (\alpha \equiv \alpha')$, α y α' son intersustituibles.

Hemos definido ahora a K en nuestra álgebra. Queda por definir $-$, $\times$, y $*$. Cuando a ($\in$ K) es la fbf α, $-a$ ha de ser $(\sim\alpha)'$ –es decir $-a$ ha de ser $\sim\alpha$ si está también en K, o su representante en K si no lo está. Cuando a y b ($\in$ K) son las fbfs α y β, $(a \times b)$ ha de ser $(\alpha \cdot \beta)'$; y $*a$ ha de ser $(M\alpha)'$. Puesto que $0 =_{Df} (a \times -a)$, y puesto que todas las fbfs de la forma $(\alpha \cdot \sim\alpha)$ estarán representadas en K por la misma fórmula, lo más sencillo es considerar a 0 como $(p \cdot \sim p)'$: y puesto que $1 =_{Df} -0$, consideramos a 1 como $(p \vee \sim p)'$.

Tenemos ahora un álgebra $<K, -, \times, *>$. Demostramos que es un álgebra T demostrando que satisface la totalidad de las condiciones 1.1–2.4.

Fácilmente se comprueba que las condiciones 1.1, 1.2 y 2.1 son satisfechas, por lo que no hace falta más comentario.

1.3 Supóngase que para algún a, $b \in$ K, $(a \times b) \neq (b \times a)$. Esto significa que cuando a y b son las fbfs α y β respectivamente, $(a \cdot b)'$ y $(\beta \cdot \alpha)'$ son fórmulas

---

[397] Seguimos las líneas principales de la prueba (para S2) de McKinsey, op. cit., págs. 122-123. McKinsey distingue entre un álgebra y una matriz. En el caso de T la única razón de esta distinción es que la matriz se considera que especifica algún elemento (de K) como el elemento "designado" (es decir el valor tomado por todos los teoremas). Nosotros consideramos a 1 como designado siempre y hemos incluido esto en nuestra definición de "verificar". Algunos autores utilizan 0 con este objetivo y de acuerdo con ello modifican su explicación en el sentido adecuado. Las matrices S2 de McKinsey (op. cit., pág. 117) tienen un conjunto de elementos designados en lugar de uno sólo.

diferentes. Pero $\vdash_T ((\alpha \cdot \beta) \equiv (\beta \cdot \alpha))$ y por tanto, de acuerdo con la construcción de K, $(\alpha \cdot \beta)'$ y $(\beta \cdot \alpha)'$ son la *misma* fórmula. De este modo es satisfecha 1.3.

1.4 Supóngase que para algún $a, b, c \in K, a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$. Esto significa que cuando, a, b y c son las fbfs, α, β y γ respectivamente, $(\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)')'$ y $((\alpha \cdot \beta)' \cdot \gamma)'$ no son la misma fórmula. Pero $\vdash_T((\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)) \equiv ((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma))$; y por tanto, puesto que $\vdash_T ((\beta \cdot \gamma) \equiv (\beta \cdot \gamma'))$ y $\vdash_T ((\alpha \cdot \beta) \equiv (\alpha \cdot \beta'))$, Eq proporciona $\vdash_T ((\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma')) \equiv ((\alpha \cdot \beta)' \cdot \gamma)$. Por consiguiente, de acuerdo con la construcción de K, $(\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)')'$ y $((\alpha \cdot \beta)' \cdot \gamma)'$ *son* la misma fórmula. De este modo es satisfecha 1.4.

1.5 Supóngase que para algún $a, b, c \in K$, $(a \times -b) = (c \times -c)$. Esto significa que cuando a, b y c son las fbfs α, β y γ respectivamente, $(\alpha \cdot (\sim\beta)')'$ y $(\gamma \cdot (\sim\gamma)')'$ son la misma fórmula; y por tanto $\vdash_T ((\alpha \cdot \sim\beta) \equiv (\gamma \cdot \sim\gamma))$. De acuerdo con transformaciones CP esto proporciona $\vdash_T ((\alpha \cdot \beta) \equiv \alpha)$, de lo que se sigue que $(\alpha \cdot \beta)'$ y α' son la misma fórmula, y por consiguiente (puesto que α está en K) $(\alpha \cdot \beta)'$ y α son la misma fórmula –es decir $(a \times b) = a$.

1.6 Puesto que $\vdash_T (\alpha \cdot \beta) \equiv \alpha) \rightarrow \vdash_T ((\alpha \cdot \sim\beta) \equiv (\gamma \cdot \sim\gamma))$, la prueba para 1.6 es semejante a la de 1.5.

2.2 De acuerdo con Def $\subset$ ésta puede escribirse nuevamente como: si $a \in K$, entonces $(a \times *a) = a$. Por tanto, tenemos que demostrar que si a es la fbf α, entonces $(\alpha \cdot (M\alpha)')'$ es la misma fórmula que α. Esto se sigue, de acuerdo con el mismo método que antes, del hecho de que $\vdash_T ((\alpha \cdot M\alpha) \equiv \alpha)$.

2.3 La prueba aquí también tiene lugar de modo semejante a partir de $\vdash_T (M(\alpha \vee \beta) \equiv M\alpha \vee M\beta))$.

2.4 Como se explicó anteriormente, 0 es $(p \cdot \sim p)'$. Por tanto $*0$ es $M(p \cdot \sim p)')'$. La prueba se desarrolla entonces como en los casos anteriores a partir de $\vdash_T (M(p \cdot \sim p) \equiv (p \cdot \sim p))$.

Esto completa la prueba de que $<K, -, \times, *>$ es un álgebra T (Por tanto de acuerdo con el Teorema 1 verifica todas las tesis de T).

Lo que queda por demostrar es que $<K, -, \times, *>$ falsifica todos los no teoremas de T. Una fbf, α, es falsificada por el álgebra SI existe alguna asignación a partir de K a las variables de α para la cual $V(\alpha) \neq 1$. Supóngase que α no es una tesis de T. Para cada variable, p_i de α hacemos $V(p_i) = p_i'$. Como resultado tenemos $V(\alpha) = \alpha'$. Por tanto, es suficiente demostrar que $\alpha' \neq 1$, es decir que α' no es la misma fórmula que $(p \vee \sim p)'$; y esto es así porque si α' y $(p \vee \sim p)'$ fuesen la misma fórmula tendríamos $\vdash_T (\alpha \equiv (p \vee \sim p))$, y por tanto $\vdash_T \alpha$ en contra de la suposición de que α no es una tesis de T.

Esto completa la prueba del Teorema II.

Hemos demostrado que el álgebra que hemos construido no es simplemente un álgebra T sino un álgebra T característica[398]. Una de las peculiaridades de este álgebra es, desde luego, el que K es infinito. Evidentemente se sigue de algunas conclusiones de Dugundji[399] que no puede existir ningún álgebra T característica finita. Nosotros podemos demostrar, sin embargo, que para cualquier no teorema de T existe un álgebra T finita que lo falsifica[400]. (Esto es semejante al caso de

---

398 Esto no demuestra que el álgebra en cuestión sea la única álgebra T característica; de hecho un sistema puede tener unas cuantas álgebras características distintas. *Vide* Lemmon [1966a], pág. 51.

399 Dugundji [1940].

400 Esta característica de T se conoce como la *propiedad del modelo finito* (finite model property) (de Harrop [1958]). *Vide* también Lemmon [1960a], pág. 7, y Drake [1962], pág. 401. Para una prueba de que S2 y S4 también tienen la propiedad del modelo finito, *vide*

los diagramas semánticos de la I Parte en los que para cualquier fbf que no fuese válida T podíamos construir un diagrama T falsificador finito). Esencialmente la prueba de esto consistirá en tomar el álgebra T característica (infinita), que, por supuesto, falsificará cualquier no teorema dado, α, y mostrar cómo construir una sub-álgebra finita que también falsificará a α. Resulta que el número máximo de elementos que la sub-álgebra debe tener depende del número de partes bien-formadas de α; para ser precisos, si α tiene n partes bien-formadas, existirá un álgebra T con a lo sumo 2^{2^n} elementos que falsifica a α.

Demostraremos todo esto un poco más adelante, cuando lleguemos al Teorema IV. Como tarea preliminar demostramos un teorema acerca de la construcción de sub-álgebras:

TEOREMA III

Dados un álgebra $T <\mathrm{K}, -, \times, *>$ *y un subconjunto finito de* K, $\{a_1, ..., a_n\}$, *existe un álgebra T finita* $<\mathrm{K}', -', \times', *'>$ *tal que*

(*i*) *para todo* a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $a_i \in \mathrm{K}'$;

(*ii*) K′ *contiene como máximo* 2^{2^n} *miembros*;

(*iii*) *para todo* $a, b \in \mathrm{K}'$, *si* $-a \in \mathrm{K}'$ *entonces* $-a = -'a$, *si* $(a \times b) \in \mathrm{K}'$ *entonces* $a \times b) = (a \times' b)$, *y si* $*a \in \mathrm{K}'$ *entonces* $*a = *'a$.

(*Nota*: Si $<\mathrm{K}', -', \times', *'>$ es un álgebra T, los postulados 1.2 y 2.1, por supuesto, garantizan que si $a, b \in \mathrm{K}'$ entonces $-'a$ $(a \times' b)$ y $*'a$ están en K′, pero no garantizan que $-a$, $(a \times b)$ y $*a$ estén en K′, ya que $-$, $\times$, y $*$ son operadores del álgebra original, no de la sub-álgebra. $-a$, $(a \times b)$ o $*a$, sin embargo, *podrían* estar en K′, puesto que se nos permite seleccionar $\{a_1, ..., a_n\}$ de cualquiera de los miembros de K; o bien pudiera ser que estuviesen en K′ debido a alguna relación que establezcamos entre los operadores de las dos álgebras[401]).

Demostramos el Teorema III construyendo un álgebra que satisface las condiciones (i)–(iii) y mostrando luego que es un álgebra T.

Hacemos que K′ sea el conjunto de todos los elementos que pueden obtenerse a partir de $a_1, ..., a_n$ de acuerdo con $-$ y $\times$ (los operadores, además de $*$, del álgebra original). Evidentemente (i) se satisface ahora. Más aún, $<\mathrm{K}', -, \times>$ es un álgebra Booleana; y es un resultado común de las álgebras Booleanas (sin $*$) –aunque no lo hayamos demostrado aquí– el que si comenzamos con n miembros, $a_1, ..., a_n$, entonces el álgebra contendrá a lo sumo 2^n átomos distintos y 2^{2^n} elementos[402]. De aquí que se satisfaga la condición (ii). A continuación definimos $-'$ y $\times'$ simplemente identificándolos con $-$ y $\times$ en tanto en cuanto éstos operan en miembros de K′; es decir para todo $a, b \in \mathrm{K}'$, hacemos que $-'a$ sea $-a$ y $(a \times' b)$ sea $(a \times b)$. Esto asegura que puesto que $<\mathrm{K}', -, \times>$ es un álgebra

---

McKinsey [1941]; para una prueba de que S5 la tiene, *vide* Scroggs [1951] y Bergmann [1949a]. Scroggs (op. cit.) muestra que cualquier sistema que contenga a S5 adecuadamente tiene un álgebra finita característica.

401 De hecho definiremos $-'$ y $\times'$ de tal modo que (para cualquier $a, b \in \mathrm{K}'$) $-a \in \mathrm{K}'$ y $(a \times b) \in \mathrm{K}'$, pero no definiremos $*'$ de tal modo que $*a \in \mathrm{K}'$; por supuesto en el álgebra que construiremos será del todo posible contar con $a \in \mathrm{K}'$ (y por consiguiente con $*'a \in \mathrm{K}'$) pero $*a \notin \mathrm{K}'$.

402 *Vide* McKinsey (op. cit.) pág. 124.

Booleana también lo sean $<K', -', x'>$; y, más aún, el que la condición (iii) sea válida por lo que a $-'$ y x' se refiere.

No podríamos identificar, sin embargo, $*'$ y $*$ del mismo modo, ya que si lo hiciésemos deberíamos o bien introducir nuevos miembros en K', y de este modo estar en peligro de dejar de cumplir la condición (ii), o de lo contrario dejaríamos de hacer de $<K', -', x', *'>$ un álgebra-T, por no tener siempre $*'a \in K'$ dondequiera que $a \in K'$. Lo que tenemos que hacer es encontrar el modo de definir a $*'$ de tal manera que siempre que $a \in K'$, (1) $*'a$ será algún elemento que esté en K' ya, esté o no esté $*a$ en K', y (2) si $*a$ está en K', $*'a$ será lo mismo que $*a$ (cumpliendo la condición (iii)).

Podemos encontrar tal definición de $*'$ del siguiente modo: Esté o no esté $*a$ en K', supóngase que existe algún $b \in K'$ tal que $a \subset b$ y $*b$ *está* en K'. En ese caso se dice que b *cubre* a a. Definimos ahora a $*'a$ como la intersección de todos los $*b$s cuyos bs cubren a a. Más exactamente, cuando $b_1, \ldots, b_k$ son todos los miembros de K' que cubren a a.

$$*'a =_{Df} (*b_1 \times \ldots \times *b_k)$$

Ahora demostramos que esta definición cumple los requisitos establecidos anteriormente para una definición de $*'$.

(1) Para cualquier $a \in K'$ habrá siempre al menos un miembro de K' que cubra a a: 1 lo hará aunque ningún otro elemento lo haga. Ya que puesto que $<K', -', x'>$ es un álgebra Booleana, $1 \in K'$; puesto que $1 = *1$[403], $*1 \in K'$; y de acuerdo con B12 $a \subset 1$. Más aún, si $*b_1, \ldots, *b_k \in K'$, entonces de acuerdo con la construcción de K', $(*b_1 \times \ldots \times *b_k) \in K'$. Por tanto si $a \in K'$, $*'a \in K'$.

(2) Es un teorema de las álgebras T (aunque omitimos aquí la prueba de ello) el que si $a \subset b_1, \ldots, a \subset b_k$, entonces $*a \subset (*b_1 \times \ldots \times *b_k)$. Ahora bien, si $b_1, \ldots b_k$ son todos los elementos que cubren a a, entonces (de acuerdo con la definición de cobertura) $a \subset b_1, \ldots, a \subset b_k$; por tanto $*a \subset (*b_1 \ldots \times *b_k)$; y por tanto (de acuerdo con Def $*'$) $*a \subset *'a$.

Más aún, si $*a \in K'$, entonces, puesto que $a \subset a$, a será cubierta por sí misma. En ese caso, cuando $b_1, \ldots, b_k$ sean todos los elementos que cubran a a, a misma será uno de éstos; y por tanto $*'a$ será $(*b_1 \ldots \times *a \ldots \times b_k)$. Pero de acuerdo con B14 $((a \times b) \subset a)$, $(*b_1 \times \ldots \times *a \ldots \times b_k) \subset *a$; es decir $*'a \subset *a$.

De este modo si $*a \in K'$, $*a = *'a$; y esto significa que la condición (iii) del Teorema III se satisface para $*'$ así como también para $-'$ y x'.

Tenemos ahora un álgebra $<K', -', x', *'>$ que satisface las condiciones (i)–(iii). Para completar la prueba del Teorema III tenemos que demostrar que es un álgebra T.

Ya hemos demostrado que $<K', -', x'>$ es un álgebra Booleana, y por consiguiente se satisfacen 1.1–1.6. Demostramos hace un momento que si $a \in K'$, entonces $*'a \in K'$, es decir que se satisface 2.1. También demostramos que $*a \subset *'a$; pero puesto que por hipótesis $<K, -, \times, *>$ es un álgebra T, $a \subset *a$; por tanto (de acuerdo con B18) $a \subset *'a$, y de este modo se satisface 2.2. Puesto que $<K', -', x'>$ es un álgebra Booleana, $0 \in K'$, y por consiguiente, puesto que $*0 = 0$, $*0 \in K'$. Por tanto, de acuerdo con la condición (iii), $*'0 = *0$, y así pues $*'0 = 0$, es decir se satisface 2.4. Todo lo que nos queda, por consiguiente, es demostrar, que también se satisface 2.3.

---

[403] De acuerdo con 2.2, $1 \subset * 1$; de acuerdo con B12, $* 1 \subset 1$; por tanto de acuerdo con B19, $1 = * 1$.

Para ello tenemos que demostrar que para todo $a, b \in K'$,

$$(1)\ *'(a+b)=(*'a+*'b)$$

Sean $a_1, ..., a_n$ todos los elementos que cubren a a; $b_1, ..., b_m$ todos los elementos que cubran a b, y $c_1, ..., c_k$ todos los elementos que cubran a $(a+b)$. Entonces de acuerdo con Def $*'$, (1) es

$$(2)\ (*c_1 \times ... \times *c_k)=(*a_1 \times ... \times *a_n)+(*b_1 \times ... \times *b_m)$$

Puesto que $<K, -, \times, *>$ es un álgebra T, la parte derecha de (2) se "multiplica" y da como resultado después de repetidas aplicaciones de B16:

$$(3)\ (*a_1+*b_1) \times ... \times (*a_n+*b_m)$$

donde para todo i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ y para todo $j (1 \leqslant j \leqslant m)$, $(*a_i + *b_j)$ es un factor (es decir uno de los términos del producto) de (2); y de acuerdo con 2.3,(3) a su vez se convierte en:

$$(4)\ *(a_1+b_1) \times ... \times *(a_n+b_m)$$

donde para todo i y j como antes, $*(a_i + b_j)$ es un factor de (4). Por consiguiente lo que se ha de demostrar es:

$$(5)\ (*c_1 \times ... \times *c_k)=*(a_1+b_1) \times ... \times *(a_n+b_m)$$

Bastará demostrar (i) que cada uno de los $c_1, ..., c_k$ es lo mismo que algún $(a_i + b_j)$ que aparezca en la parte derecha de (5), (ii) que cada uno de tales $(a_i + b_j)$ es lo mismo que uno de los $c_1, ..., c_k$.

(i) Sea c_l cualquiera de los $c_1, ..., c_k$. Entonces puesto que c_l cubre a $(a+b)$, $(a+b) \subset c_l$. Por tanto de acuerdo con B17, $a \subset c_l$ y $b \subset c_l$. Más aún, $*c_l \in K'$. Por tanto c_l cubre tanto a a como a b; es decir c_l es algún a_i y es también algún b_j, y por consiguiente para este a_i y b_j, $c_l=(a_i+b_j)$ (de acuerdo con B9).

(ii) Puesto que a_i cubre a a y b_j cubre a b, $a \subset a_i$ y $b \subset b_j$. Por tanto (de acuerdo con B20), $(a+b) \subset (a_i+b_j)$. Más aún, $*a_i, *b_j \in K'$, y por tanto $(*a_i + *b_j) \in K'$; pero puesto que $<K, -, \times, *>$ es un álgebra T, $(*a_i + *b_j) = *(a_i + b_j)$ (de acuerdo con 2.3), y por consiguiente $*(a_i + b_j) \in K'$. Por tanto $(a_i + b_j)$ cubre a $(a+b)$; es decir $(a_i + b_j)$ es uno de los $c_1, ..., c_k$.

Esto completa la prueba del Teorema III.

TEOREMA IV

Si α es una fbf de T, conteniendo n partes bien-formadas[404], *entonces α es una tesis de T SI es verificada por toda álgebra T que contenga a lo sumo 2^{2^n} elementos.*

PRUEBA

De acuerdo con el Teorema I, si α es una tesis de T es verificada por cualquier álgebra T, y por tanto por toda álgebra T que contenga a lo sumo 2^{2^n} elementos. Lo que falta por demostrar, por consiguiente, es que si α no es una tesis de T es falsificada por algún álgebra T que contenga a lo sumo 2^{2^n} elementos.

Supóngase entonces que α no es una tesis de T. Sea $<K, -, \times, *>$ el álgebra T característica. De acuerdo con el Teorema II, α será falsificada por este álgebra: es decir, para alguna asignación a partir de K a las variables de α, $V(\alpha) \neq 1$. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n$ las partes bien-formadas de α, y sean $a_1, ..., a_n$ los miembros de K

[404] McKinsey [1941] (pág. 125) denomina a éstas *sub-sentencias* de α. Obsérvese que al contar las partes bien-formadas de una fórmula presuponemos que está escrita en notación primitiva.

que (como resultado de esta asignación a las variables) se asignan a α_1, ..., α_n respectivamente. Ahora sea $<K', -', x', *'>$ un álgebra T finita construida según la forma explicada en la prueba del Teorema III, con $\{a_1, ..., a_n\}$ como el subconjunto finito inicial de K. En $<K', -', x', *'>$ hacemos entonces a las variables de α la misma asignación que falsificó a α en $<K, -, x, *>$. Como resultado los elementos así asignados a las partes bien-formadas de α estarán todos en K'; y puesto que $<K', -', x', *'>$ satisface la condición (iii) del Teorema III, cuando evaluemos a α utilizando $-'$, x', y $*'$ en lugar de $-$, x, y $*$, $V(\alpha)$ será lo mismo en este álgebra que en $<K, -, x, *>$; es decir $V(\alpha) \neq 1$ para esta asignación en $<K', -', x', *'>$. Más aún, de acuerdo nuevamente con el Teorema III, $<K', -', x', *'>$ tiene a lo sumo 2^{2^n} elementos.

El Teorema IV nos proporciona –en teoría al menos– una solución al problema de la decisión para T, ya que cualquier fbf, α, tiene un número finito, n, de partes bien-formadas y si n es finito también lo es 2^{2^n}. Más aún, si cualquier número es finito, existe solamente un número finito de álgebras T que no contengan más que ese número de elementos; y dada un álgebra T finita sólo se necesita un número finito de pasos para determinar si una fórmula determinada es verificada por ella o no. Por tanto, puesto que de acuerdo con el Teorema IV α es una tesis SI es verificada por toda álgebra T que no contenga más de 2^{2^n} elementos, en un número finito de pasos puede determinarse efectivamente si es una tesis o no.

Este procedimiento de decisión, sin embargo, aunque es de importancia teórica no ofrece utilización práctica (al menos a aquéllos que no posean computadoras de gran velocidad a su disposición), a causa de la cantidad de números implicados. Considérese la simple fórmula $((p \vee q) \vee \sim Mp)$. Esta tiene seis partes bien-formadas: p; q; Mp; $\sim Mp$; $(p \vee q)$; y la propia $((p \vee q) \vee \sim Mp)$. Por tanto, es una tesis SI es verificada por toda álgebra T que no contenga más de 2^{2^6} elementos. Ahora bien $2^{2^6} = 256^8$ –y todavía no hemos empezado a calcular el número de álgebras T con no más que este número de elementos o el número de pasos necesarios para comprobar la fórmula en cada una de ellas. Afortunadamente pudimos descubrir un procedimiento de decisión mucho más práctico para T en el capítulo 5.

Las álgebras Booleanas y la validez T

En la sección anterior nos hemos ocupado de emparejar las álgebras Booleanas con una versión axiomática de T, y expresar así en términos algebraicos las condiciones para comprobar si una fórmula es tesis de T. Mostraremos ahora cómo emparejar ciertas álgebras Booleanas con nuestros anteriores modelos semánticos para T, y dar así una explicación algebraica de la validez T[405]. Relacionaremos luego estas nuevas álgebras con las antiguas de forma que se muestre que los criterios de tesistud*(thesishood) y validez coinciden; esto constituirá una prueba algebraica de la completitud de T, alternativa de la prueba que dimos en el Capítulo 5 (Al igual que antes dejamos para el lector la extensión de estos resultados a S4 y S5).

Ya nos hemos referido a la interpretación de los elementos de un álgebra Boo-

---

405 Podría decirse, por supuesto, que las álgebras T que ya hemos considerado nos proporcionan una definición de la validez T; pero no es una definición que esté estrechamente relacionada con las definiciones semánticas del Capítulo 4.

*Nota de la Trad.: Carente del equivalente castellano de "thesishood" me he visto obligada a introducir "tesistud", aunque soy consciente de que no es término demasiado afortunado. (En otros lugares de la obra he recurrido a la perífrasis para evitar el vocablo).

leana como conjuntos. La forma más fácil de lograr una captación intuitiva de las álgebras que vamos a construir es considerar a sus elementos como *conjuntos de mundos* (en un modelo T) y a una proposición como al conjunto de todos los mundos en los que es verdadera. Será sensato asignar a cada variable proposicional de una fórmula algún miembro de K. Más aún, en cualquier modelo T, $p \cdot q$ es verdadero en aquellos mundos exactamente en los que tanto p como q son verdaderas, es decir en la intersección del conjunto de mundos en los que p es verdadera y el conjunto de aquéllos en los que q es verdadera. Por tanto si $V(p)=a$ y $V(q)=b$, tendremos $V(p \cdot q)=(a \times b)$. De modo semejante, puesto que $\sim p$ es verdadera en aquellos mundos exactamente en que p no es verdadera, si $V(p)=a$, $V(\sim p)=-a$. De este modo mantenemos hasta aquí la analogía con nuestras anteriores álgebras T. Queda sólo por demostrar cómo M puede ajustarse en este modelo de tal modo que nos proporcione un álgebra que refleje exactamente la estructura de un modelo T.

Para este propósito hacemos uso de la noción de *átomo* de un álgebra Booleana. Explicamos en la pág.257 que todo elemento no nulo en un álgebra Booleana finita[406] puede expresarse como la suma de un número de átomos, y que cuando los elementos son conjuntos los átomos representan conjuntos unitarios. Aquí podemos considerar que los átomos representan los mundos individuales en un modelo T. Ahora bien, en cualquier modelo T, $M\alpha$ es verdadera en un mundo mu_i SI α es verdadera en algún mundo mu_j tal que $mu_i R mu_j$, siendo R una relación reflexiva que abarca el conjunto de los mundos del modelo; y al introducir en un álgebra Booleana una relación R, reflexiva que abarque todo K, podemos dar la siguiente regla análoga para evaluar $M\alpha$, dado $V(\alpha)$:

Si $V(\alpha)=a$, entonces cuando $a^1, \ldots, a^k$ son todos los átomos de a (de forma que $a=(a^1+\ldots+a^k)$), y $b_1, \ldots, b^m$ son todos los átomos en K tales que para cada b^j $(1 \leqslant j \leqslant m)$, $b^j R a^i$ (cuando a^i es una de las $a^1, \ldots, a^k$), $V(M\alpha)=b^1+\ldots+b^m$). (En otras palabras si $V(\alpha)=a$, entonces $V(M\alpha)$ –es decir, $*a$ –es la suma de todos los átomos relacionados mediante R con cualquier átomo de a[407]).

---

406 No perdemos generalidad por limitarnos a álgebras finitas, ya que ocurre lo mismo que con el Teorema IV en el presente contexto, es decir, aunque no existe ningún álgebra finita tal que toda fbf de T sea válida o no válida según sea verificada por ella o no, sin embargo cada fbf particular es válida SI es verificada por toda álgebra finita (del tipo que estamos construyendo) con un cierto número máximo de elementos.

407 Una definición ligeramente distinta consistiría simplemente en decir que $*a$ es la suma de todos los bs tales que bRa. Jonsson and Tarski [1951], pág. 935 demuestran que las álgebras de clausura (es decir álgebras S4) pueden caracterizarse por este medio cuando R es transitiva. Otro método equivalente (Drake [1962]) es suponer, en lugar de R, un conjunto S de funciones tales que, para todo $s \in S$ y $a, b \in K$ se satisface lo siguiente:

a1. $s(a) \in K$.
a2. $-s(a)=s(-a)$
a3. $(s(a) \times s(b))=s(a \times b)$
a4. Existe algún $s_1 \in S$ tal que $s_1(a)=a$.

Podemos entonces definir $*a$ como la suma de todos los $s(a)$s para todo $s \in S$ y obtener un álgebra T.

Para obtener un álgebra S4 añadimos:

a5. Para todo $s_i, s_j \in S$ existe algún $s_k \in S$ tal que $s_k(a)=s_i(s_j(a))$; y para un álgebra S5:

a6. Para todo $s \in S$ existe algún $s' \in S$ tal que $s'(s(a))=a$.

Si los elementos de K se intepretan como sentencias de algún lenguaje entonces los miembros de S pueden interpretarse como sustituciones que permiten que se realicen ciertas transformaciones que producirán otras sentencias. Tal interpretación permite la formulación de la definición "sintáctica" de la posibilidad en McKinsey [1945] (pág. 83), McKinsey define una sentencia como posible si puede transformarse en una verdadera mediante un conjunto de sustituciones que preservan su forma lógica. Para él esto equivale esencialmente a una sustitución que satisfaga a1-a5. Muestra este autor que el sistema de lógica modal obtenido entonces es por lo menos tan fuerte como S4. Que es precisamente S4 fue mostrado por Drake (op. cit.). Un punto de vista semejante es mantenido por Makinson [1966b].

Diremos que $<K, -, x, R>$ es un álgebra T' SI $<K, -, x>$ es un álgebra Booleana y R es una relación reflexiva que abarca todo K. Decimos que tal álgebra verifica a una fbf de T, α, SI para cada asignación a partir de K a las variables de α, $V(\alpha) = 1$[408] cuando α es evaluada mediante las reglas acabadas de dar para $\sim$, $\cdot$ y *M*.

Debe quedar claro por el modo en que hemos definido un álgebra T' que dado un modelo T $<MU, R, V>$ podemos construir un álgebra T' $<K, -, x, R>$ y una asignación de valor a variables tal que (i) para todo $mu_i \in MU$ corresponde algún átomo único $a^i \in K$; (ii) cuando y sólo cuando $mu_i R mu_k$ para los correspondientes átomos tenemos $a^i R a^k$; (iii) para cuando $mu_i R mu_k$, p_m, $V(p_m)$ en el álgebra es $(b^1 + ... + b^n)$ siendo $b^1, ..., b^n$ todos los átomos correspondientes a los mundos del modelo en los que $V(p_m) = 1$. En tal caso diremos que el álgebra junto con la asignación de valor, *se corresponde con* el modelo.

Se sigue de todo esto que SI una fbf, α, tiene el valor 1 en todo mundo en un modelo T dado, entonces para el álgebra T' correspondiente y la asignación de valor, $V(\alpha)$ será la suma de todos los átomos de K. Ahora bien, la suma de todos los átomos de K es 1; por tanto, en este caso $V(\alpha) = 1$. Más aún, para cada álgebra T' junto con una asignación de valor corresponderá un modelo T; por tanto SI $V(\alpha) = 1$ en todo mundo de todo modelo T —es decir SI α es válida T — α es verificada por toda álgebra T'. Hemos llegado de este modo a una definición algebraica de la validez en T.

Lo que nos queda por hacer es demostrar que para cada álgebra T' $<K, -, x, R>$ existe un álgebra T $<K, -, x, *>$ que verifica exactamente las mismas fórmulas y que para toda álgebra T existe un álgebra T' que verifica exactamente las mismas fórmulas. Tendremos por tanto la conclusión de que si una fbf, α, es verificada por toda álgebra T' (y es por consiguiente válida) entonces es verificada por toda álgebra T (y es, por consiguiente, de acuerdo con el Teorema IV, una tesis de T); es decir, tendremos una prueba algebraica de la completitud de T.

Por consiguiente demostramos los dos siguientes teoremas:

TEOREMA V

Si $<K, -, x, R>$ *es un álgebra T', existe un álgebra T* $<K, -, x, *>$ *que verifica exactamente las mismas fbfs que lo hace* $<K, -, x, R>$.

PRUEBA

Dado $<K, -, x, R>$ como álgebra T', para construir un álgebra $<K, -, x, *>$ sólo tenemos que definir a $*$. Lo llevamos a cabo haciendo que $*0$ sea 0, y para todo $a \in K$ no nulo haciendo que $*a$ sea $(b^1 + ... + b^m)$, siendo $b^1, ..., b^m$ todos los átomos relacionados mediante R (en el álgebra T') con cualquier átomo de a como se explicó anteriormente. Ahora mostramos que $<K, -, x, *>$ así definida es un álgebra T.

Puesto que $<K, -, x>$ es por hipótesis un álgebra Booleana, tenemos únicamente que demostrar que 2.1–2.4 son válidas.

2.1 Si $a = 0$, entonces $*a = *0$. Pero, por definición, $*0 = 0$; por tanto $*a = 0$, y por consiguiente $*a \in K$. Si a es no nula, a es la suma de un número de átomos, cada uno de los cuales está en K. Puesto que R es reflexiva, cada átomo tal está relacionado mediante R consigo mismo. Por tanto, siempre habrá algún átomo relacionado con un átomo de a, y por consiguiente una vez más $*a \in K$.

408 1 debe entenderse aquí, por supuesto, como el elemento unitario (unit) del álgebra (nota 382) y no como un valor de verdad.

2.2 Sean $a^1, ..., a^k$ todos los átomos de a. Entonces $a = (a^1 + ... + a^k)$. Pero puesto que R es reflexiva cada una de las $a^1, ..., a^k$ es una de las $b^1, ..., b^m$. Por tanto de acuerdo con B15 $(a \subset (a + b)), a \subset *a$.

2.3 Los átomos de $(a + b)$ son precisamente los átomos de a junto con los átomos de b. Por tanto los átomos relacionados mediante R con cualquier átomo de $(a + b)$ son precisamente los relacionados con cualquier átomo de a junto con los relacionados con cualquier átomo de b; por consiguiente

$$*a + *b = *(a + b)$$

2.4 es válida de acuerdo con la definición de $*$.

Por tanto $<K, -, x, * >$ es un álgebra T.

Más aún, es fácil ver que $<K, -, x, R>$ y $<K, -, x, * >$ verifican exactamente a las mismas fórmulas. Ya que, puesto que K, $-$ y x son idénticos en las dos álgebras, $\sim$ y $\cdot$ serán representados del mismo modo en cada una de ellas. Y dado que $V(\alpha) = a$, representamos a $M\alpha$ en un álgebra T mediante $*a$, es decir en el presente caso mediante $(b^1 + ... + b^m)$, que es precisamente el modo como se evalúa a $M\alpha$ en el álgebra T'.

TEOREMA VI

Si $<K, -, x, * >$ *es un álgebra T existe un álgebra T'* $<K, -, x, R>$ *que verifica exactamente las mismas fbfs que lo hace* $<K, -, x, * >$.

PRUEBA

Dado $<K, -, x, * >$ como un álgebra T, para construir un álgebra $<K, -, x, R>$ sólo tenemos que definir R. Lo llevamos a cabo haciendo que R sea una relación tal que, para cualquier $a, b \in K$, $b R a$ SI para cada átomo b^j de b existe algún átomo a^i de a tal que $b^j \subset *a^i$. a^i. Se seguirá que R es reflexiva para todo K; ya que de acuerdo con la definición de R tendremos aRa SI para cada átomo a^j de a existe algún átomo a^i de a tal que $a^j \subset *a^i$, y puesto que a^i puede ser la propia a^j, 2.2 garantiza que esta condición se cumpla siempre. Puesto que R es reflexiva, $<K, -, x, R>$ es un álgebra T'.

Queda por demostrar que las dos álgebras verifican exactamente las mismas fórmulas. Puesto que K, $-$ y x son idénticos en cada una de ellas sólo tenemos que demostrar que las expresiones que contienen a M se evalúan del mismo modo en cada una. Sea $V(\alpha), a$ para una fbf α dada; entonces $V(M\alpha)$ en el álgebra T es a y $V(M\alpha)$ en el álgebra T' es $(b^1 + ... + b^m)$, siendo $b^1, ..., b^m$ todos los átomos de K relacionados mediante R con cualquier átomo de a. De acuerdo con la definición de R, lo que esto significa es que (i) todo b^j entre $b^1, ..., b^m$ está incluido en uno de los a^i, siendo los a^i los átomos de a y (ii) todo átomo incluido en cualquiera de los a^i es uno de los b^j; es decir, siendo $a^1, ..., a^k$ todos los átomos de a.

$$(b^1 + ... + b^m) = (*a^1 + ... + *a^k)$$

Por tanto, de acuerdo con 2.3:

$$(b^1 + ... + b^m) = *(a^1 + ... + a^k)$$

y por tanto, de acuerdo con B23:

$$(b^1 + ... + b^m) = *a$$ **Q.E.D.**

Como explicamos anteriormente, con las pruebas de los Teoremas V y VI tenemos una prueba algebraica de la completitud de T.

APENDICE I

DEDUCCION NATURAL Y SISTEMAS MODALES

En atención a aquellos lectores que están acostumbrados a trabajar en lógica mediante lo que es conocido como el método de la *deducción natural*[409] damos aquí un breve esbozo de cómo este método puede extenderse para tratar ciertos sistemas modales. Nos limitamos a sistemas proposicionales. Seguimos en lo principal la explicación dada por Fitch[410] y presuponemos al lector familiarizado con las nociones de hipótesis y prueba subordinada, así como con las diversas reglas de Introducción, Eliminación y Reiteración (para lógica no modal) que constituyen los principales mecanismos del método.

Dado un conjunto de reglas suficientes para la derivación de todas las fórmulas válidas de CP, introducimos tres reglas para las fórmulas que contienen L[411]. La segunda de estas reglas tiene tres formas alternativas, y según cuál de ellas adoptemos obtendremos T, S4 o S5.

1. *Eliminación de la Necesidad*

Si $L\alpha$ aparece en cualquier estadio de una prueba, entonces α puede aparecer en un estadio posterior.

Para las restantes reglas necesitamos la noción de prueba *subordinada estricta.* En una prueba subordinada estricta podemos proceder de acuerdo con las reglas habituales de las pruebas subordinadas, excepto que en lugar de la regla ordinaria de la Reiteración tenemos una regla más restringida de Reiteración Estricta que puede tomar cualquiera de las siguientes formas:

2. *Reiteración estricta*

A. α puede aparecer en una prueba subordinada estricta si $L\alpha$ aparece anteriormente en la prueba de la que es subordinada.

B. $L\alpha$ puede aparecer en una prueba subordinada estricta si $L\alpha$ aparece anteriormente en la prueba de la que es subordinada.

C. $\sim L\alpha$ puede aparecer en una prueba subordinada estricta si $\sim L\alpha$ aparece anteriormente en la prueba de la que es subordinada[412].

---

409 Este método fue desarrollado por vez primera por Gentzen en [1934] y se encuentra en un buen número de textos de lógica. Esencialmente brinda una alternativa a la presentación axiomática de un sistema. Para un estudio introductorio de la materia *vide* Fitch [1952] o Anderson and Johnstone [1962].

410 Fitch (op. cit.) págs. 64-80. Fitch también considera brevemente el CEP modal en las págs. 164-166.

411 Fitch (op. cit.) págs. 64-66.

412 Sólo aparecen en Fitch las formas A y B. Wisdome [1964], pág. 298, atribuye C a

Tenemos finalmente:

3. *Introducción de la necesidad*
Si α aparece en una prueba subordinada estricta *categórica* (es decir si α se muestra sin partir de ninguna hipótesis en una prueba subordinada estricta), entonces $L\alpha$ puede aparecer posteriormente en la prueba de la que es subordinada.

Pueden derivarse reglas análogas para M, -3 y $=$ a partir de las reglas mencionadas (junto con las reglas CP acostumbradas) de forma completamente directa.

Demostramos ahora que las reglas 1, 2A y 3 producen T[413], 1, 2B y 3 producen S4 y 1, 2C y 3 producen S5. Presuponemos, por supuesto, que estas reglas se añaden a un conjunto de reglas suficientes para derivar CP. En primer lugar derivamos los axiomas modales de T. Las pruebas subordinadas estrictas las indicamos mediante la notación de Fitch de un cuadrado colocado a la izquierda de la parte superior de la línea vertical que abarca la prueba.

A5 $Lp \supset p$

(1)	Lp	Hipótesis
(2)	p	(1), Eliminación de la Necesidad
(3) $Lp \supset p$		(1), (2), Introducción de la Implicación

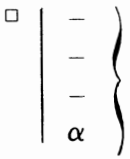
A6 $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$

(1)	$L(p \supset q)$				Hipótesis
(2)		Lp			Hipótesis
(3)			□	p	(2), Reiteración estricta A
(4)				$p \supset q$	(1), Reiteración estricta A
(5)				q	(3), (4), Eliminación de la Implicación
(6)		Lq			(5), Introducción de la Necesidad
(7)	$Lp \supset Lq$				(2), (6), Introducción de la Implicación
(8) $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$					(1), (7), Introducción de la Implicación

Para la regla de la Necesariedad tenemos que demostrar que siempre que haya una prueba de α hay también una prueba de $L\alpha$. Ahora bien, decir que hay una prueba de α es decir que existe una prueba tal que no está subordinada a ninguna otra prueba. Por tanto, ninguna parte de ella se obtiene por reiteración a partir de prueba alguna a la que esté subordinada; y por consiguiente, podría ser tratada como una prueba subordinada estricta. Así pues, siempre podríamos obtener una prueba de $L\alpha$ como sigue:

Robert Price. Una formulación equivalente sería: "α puede aparecer en una prueba subordinada estricta si α aparece con anterioridad en la prueba a la que está subordinada y α está completamente modalizada".

[413] Fitch (op. cit., pág. 66) dice que estas reglas proporcionan un sistema "casi igual" que S2.



Prueba de α

$L\alpha$ Introducción de la Necesidad

Hemos así derivado la base completa de T. Utilizando la regla 2B podemos demostrar además muy fácilmente el axioma característico de S4, A7:

A7 $Lp \supset LLp$

(1)	Lp	Hipótesis
(2)	□ Lp	(1), Reiteración estricta B
(3)	LLp	(2), Introducción de la Necesidad
(4)	$Lp \supset LLp$	(1), (3), Introducción de la Implicación

Y utilizando la regla 2C podemos dar una prueba exactamente análoga del axioma de S5, A8, en la forma $\sim Lp \supset L \sim Lp$.

Hemos mostrado de este modo que los sistemas obtenidos mediante las nuevas reglas son por lo menos tan fuertes como T, S4 y S5, respectivamente. De hecho puede demostrarse (aunque no lo demostraremos aquí) que son exactamente T, S4 y S5[414].

414 El primer intento de utilizar los métodos de la deducción natural para los sistemas modales parece haber sido hecho por Moh Shaw-Kwei [1950]; pero, con excepción de uno que era equivalente a S4, sus sistemas no resultaron ser equivalentes a ninguno de los sistemas de Lewis. Otros sistemas de deducción natural para T, S4 o S5 se encuentran en Curry [1950, 1952], Kanger [1957a], Ohnishi and Matsumoto [1957, 1959], Matsumoto [1960], Ohnishi [1961a, b] y Canty [1964]. Ohnishi y Matsumoto también han desarrollado formulaciones de deducción natural de S2 y S3. Para un resumen de los sistemas de deducción natural de CP modal, *vide* Feys [1965], págs. 106-109 y 173-185.

APENDICE II

VINCULACION E IMPLICACION ESTRICTA

Decir que una proposición vincula (entails) a otra es simplemente otro modo, y a menudo más conveniente, de decir que la segunda se sigue lógicamente de, o es lógicamente deducible de, la primera[415]. Ahora bien, como hemos dicho atrás en el capítulo 2 (pág. 33) hemos pretendido que el símbolo $\dashv\!\!\exists$ se interpretase como "vincula". Algunos escritores, sin embargo, han objetado que ciertas fórmulas que son tesis incluso del sistema modal más débil que hemos considerado, S0.5, no son plausibles como principios de vinculación o deducibilidad. Estas fórmulas se denominan frecuentemente las "paradojas de la implicación estricta"[416], y las más importantes de ellas son las siguientes[417]:

$$(1)\ (p \cdot \sim p) \dashv\!\!\exists\ q$$

$$(2)\ q \dashv\!\!\exists\ (p \vee \sim p)$$

$$(3)\ \sim Mp \supset (p \dashv\!\!\exists\ q)$$

$$(4)\ Lq \supset (p \dashv\!\!\exists\ q)$$

Cuando $\dashv\!\!\exists$ se interpreta como "vincula", (1) significa que a partir de cualquier proposición de la forma $(p \cdot \sim p)$ puede deducirse cualquier tipo de proposición, y (2) significa que a partir de cualquier tipo de proposición puede deducirse cualquier proposición de la forma $(p \vee \sim p)$. (3) y (4) son más generales. (3) significa que a partir de cualquier proposición lógicamente imposible (ya bien de la forma $(p \cdot \sim p)$ o no) puede deducirse cualquier tipo de proposición, y (4) significa que toda proposición necesaria (ya de la forma $(p \vee \sim p)$ o no) puede ser deducida de cualquier tipo de proposición.

Si éstos no fuesen principios válidos de deducibilidad serían una objeción en contra de la proclamación de que los sistemas modales habituales (standard) son lógicas correctas de vinculación. Pero a fin de decidir si son o no son principios válidos de deducibilidad tenemos que inspeccionar qué es lo que nosotros conside-

---

415 Este uso de "vincula" (entails) lleva siendo desde hace algún tiempo habitual en filosofía. Se deriva de Moore [1919] (re-editado en sus *Philosophical Studies vide*, esp. pág. 291).

416 Tendenciosamente, ya que los de la otra parte de la controversia consideran que las fórmulas expresan principios de deducibilidad perfectamente válidos, y, se dé la explicación que se quiera, expresan verdades valederas y del todo no paradójicas acerca de la implicación estricta. Las "paradojas" parecen haber sido establecidas por primera vez (e incidentalmente aceptadas como no paradójicas) en la lógica moderna por MacColl [1906b], pág. 513. Para información acerca de sus anticipaciones medievales *vide* Kneale [1962b], pág. 281 y ss.

417 En S2 y sistemas más fuertes también podemos demostrar $\sim Mp \dashv\!\!\exists (p \dashv\!\!\exists q)$ y $Lq \dashv\!\!\exists (p \dashv\!\!\exists q)$. Dos intentos anteriores de formalizar una relación que no conduce a las "paradojas" (Emch [1936] y Vredenduin [1939]) las evitaron en las formas S2 pero contenían nuestras (1) y (2) como teoremas.

ramos que estamos afirmando cuando afirmamos que una proposición es deducible a partir de otra.

Ahora bien, una explicación plausible –y quizá la única que proporciona verdadera claridad– es la de que decir que q es deducible de p es decir que es lógicamente imposible que p sea verdadera pero q falsa. La Deducibilidad es, pues de todo, la relación que se mantiene entre la conclusión y la(s) premisa(s) de una inferencia deductiva válida, y lo que precisamos en una inferencia válida es la garantía lógica de que no tendremos la(s) premisa(s) verdadera(s) y en cambio la conclusión falsa. Ahora bien, de acuerdo con esta explicación las "paradojas" *son* principios válidos de deducibilidad; y, por tanto, no es su presencia en, sino su ausencia de un sistema lo que sería una objeción contra la afirmación de que ésta es una lógica correcta de vinculación. Considerando el caso de (1): decir que $(p \cdot \sim p)$ vincula a q es, según esta explicación, decir que es lógicamente imposible que $(p \cdot \sim p)$ sea verdadera y q falsa, es decir, equivale a decir que $(p \cdot \sim p \cdot \sim q)$ es lógicamente imposible; pero puesto que la propia $(p \cdot \sim p)$ es imposible también lo es $(p \cdot \sim p \cdot \sim q)$. Comentarios semejantes aplicarán a las demás "paradojas". Más aún, esta explicación garantizará el que $\dashv$ pueda ser interpretado como "vincula"; ya que en todos los sistemas corrientes $(\alpha \dashv \beta)$ se define como $\sim M(\alpha \cdot \sim \beta)$ (o, lo que viene a ser lo mismo, como $L(\alpha \supset \beta)$), donde M se interpreta como "es lógicamente posible que".

No es probable que nadie niegue que la imposibilidad lógica de $(p \cdot \sim q)$ es una condición *necesaria* de la deducibilidad de q a partir de p, pero se ha sugerido que no es una condición *suficiente*, basándose en que una condición adicional de la deducibilidad de q a partir de p es que debe existir alguna conexión de "contenido" o "significado" entre p y q. Sin embargo, es extremadamente difícil, si no imposible, el establecer este requisito adicional en términos precisos; y al insistirse en él parece que se introduce en una, por lo demás, explicación clara y utilizable de la deducibilidad un elemento gratuitamente vago que hará imposible determinar si un sistema formal dado es una lógica correcta de la vinculación o no.

Incluso aquellos que se inclinan a aceptar este requisito adicional para la deducibilidad, sin embargo, tienen que hacer frente al siguiente argumento. En cualquier explicación tendremos que considerar a q deducible de p cuando pueda derivarse de p mediante algún principio o principios de inferencia deductiva válidos[418]. Ahora bien, los siguientes principios parecen ser intuitivamente válidos:

A. Cualquier conjunción vincula a cada uno de sus miembros (conjuncts).

B. Cualquier proposición, p, vincula a $(p \vee q)$ sea lo que sea q.

C. Las premisas $(p \vee q)$ y $\sim p$, conjuntamente, vinculan a la conclusión q (principio del *silogismo disyuntivo*).

D. Siempre que p vincule a q y q vincule a r, entonces p vincula a r (principio de la *transitividad de la vinculación*).

C.I. Lewis ha demostrado que utilizando estos principios podemos derivar siem-

418 Decir que q puede derivarse de p mediante *algún(os) principio(s) válido(s) de inferencia* no es (como se advierte en Lewis and Langford [1932] págs. 252-255) lo mismo que decir que puede derivarse mediante los principios de un sistema determinado, o mediante principios que ya hayamos establecido hasta un punto determinado del desarrollo de un sistema. Más bien significa que los principios que nos permiten pasar de p a q son válidos, aparezcan o no aparezcan en algún sistema particular. *Vide* Pollock [1966], págs. 184-185, para una discusión de esta confusión en escritores posteriores a Lewis.

pre cualquier proposición arbitraria, q, a partir de cualquier proposición de la forma $(p \cdot \sim p)$, del modo siguiente[419]:

	(i) $p \cdot \sim p$
A partir de (i), de acuerdo con A:	(ii) p
A partir de (ii), de acuerdo con B:	(iii) $p \vee q$
A partir de (i), de acuerdo con A:	(iv) $\sim p$
A partir de (iii) y (iv), de acuerdo con C:	(v) q

De acuerdo con D podemos tener entonces el resultado de que $(p \cdot \sim p)$ vincula a q.

Esta derivación muestra que el precio que tiene que pagarse por negar que $(p \cdot \sim p)$ vincula a q es el abandono de al menos uno de los principios A–D. Francamente nos parece este precio exorbitantemente elevado, puesto que todos los A–D parecen intuitivamente válidos y el principio de que $(p \cdot \sim p)$ vincula a q es, en el peor de los casos, un principio inocente; nunca podría descarriarnos en la práctica llevándonos de una premisa verdadera a una conclusión falsa, ya que ninguna proposición de la forma $(p \cdot \sim p)$ puede ser jamás verdadera.

Esto no significa, desde luego, el negar que podamos tener una lógica formal de una relación que no sea válida entre $(p \cdot \sim p)$ y q pero que sea válida en la gran mayoría de los casos en los que necesitemos decir, intuitivamente, que la vinculación es válida. El sistema E de Anderson y Belnap, que esbozamos en la pág. 244 y ss. es una lógica tal. En ella ninguna de las "paradojas" son teoremas (cuando $\dashv$ se sustituye en todas partes por el símbolo $\rightarrow$ que ellos leen como "vincula"). Sin embargo, como muestra la derivación de Lewis de q a partir de $(p \cdot \sim p)$ cualquier sistema tal (siempre que contenga la regla habitual de la sustitución uniforme) debe también omitir al menos uno de los principios que denominábamos A–D. En el sistema E, de hecho el silogismo disyuntivo falla, en el sentido de que $((p \vee q) \cdot \sim p) \rightarrow q$ no es un teorema (y desde luego no podría añadirse al sistema sin traer en su séquito las "paradojas" para cuya exclusión fue especialmente ideado el sistema).

La mera construcción de un sistema axiomático tal, sin embargo, no nos proporciona un concepto preciso de vinculación que pudiese ser rival de la mencionada anteriormente, que es tan adecuadamente expresada mediante $\dashv$; y a nuestro juicio la ausencia de aunque sólo sea uno nada más de los principios A–D es una razón intuitiva mucho mejor para negar que un sistema es una lógica correcta de la vinculación que pudiera serlo la presencia de las "paradojas" En realidad nos inclinamos a ir más adelante y decir todavía más: reflexionando, las "paradojas" nos parecen no excentricidades molestas (aunque inofensivas) que tenemos que tolerar a fin de tener el silogismo disyuntivo, la transitividad de la vinculación y lo demás, sino principios válidos por derecho propio: una lógica de la vinculación *debe* (*ought to*) contener, por ejemplo, algún principio que refleje nuestra inclinación a decir a alguien que ha dicho algo autocontradictorio, "Si se aceptase *eso*, se podría de-

419 Cf. Lewis and Langford [1932], págs. 250-251, donde también se encuentra una derivación análoga, relevante en el mismo sentido que nuestra (2), de $\sim q \vee q$ a partir de p. Para una anticipación medieval de la derivación de Lewis de q a partir de $p \cdot \sim p$ *vide* Kneale, loc. cit. y [1956], págs. 239-240. También es posible derivar el resultado de que $(p \cdot \sim p)$ vincula (entails) a $\sim q$ (una sencilla variante de la "paradoja" en cuestión, igualmente general) partiendo del principio de que $(p \cdot q)$ vincula (entails) a p y aplicándole el principio del *antilogismo*, a saber, que si $(p \cdot \sim q)$ vincula (entails) a r entonces $(p \cdot \sim r)$ vincula a $\sim q$ (*vide* Lewis [1914a], pág. 246*n* y Moh Shaw-Kwei [1950], pág. 70).

mostrar cualquier cosa en absoluto" –y el principio de que $(p \cdot \sim p)$ vincula a q expresa esto mismo en la forma que podría esperarse en un sistema formal[420].

420 Para nuevas discusiones de las cuestiones suscitadas en este Apéndice, y referencias a la literatura *vide* Bennet [1954, 1965], Duncan-Jones [1935], Geach [1958], Lewy [1950, 1958], Nelson [1930], Pollock [1966], Smiley [1959], Strawson [1948], Von Wright [1957].

APENDICE III

BASES AXIOMATICAS PARA SISTEMAS MODALES PROPOSICIONALES

Resuminos aquí las bases axiomáticas de todos los sistemas de la lógica modal proposicional que hemos considerado, excepto unos cuantos mencionados en el Capítulo 16 que se apartan un tanto del resto y cuyas bases, en cualquier caso, están debidamente establecidas en ese capítulo.

Primero damos listas de definiciones, reglas y axiomas, con referencia a las páginas y (cuando sea conveniente) los nombres utilizados para ellos en el texto. Luego especificamos las bases axiomáticas con referencia a estas listas.

Definiciones

Def M:	$M\alpha =_{\mathrm{Df}} \sim L \sim \alpha$	[pág. 37]
Def M':	$M\alpha =_{\mathrm{Df}} (\alpha \dashv L\alpha) \dashv L\alpha$	[pág. 241]
Def L:	$L\alpha =_{\mathrm{Df}} \sim M \sim \alpha$	[pág. 111]
Def L':	$L\alpha =_{\mathrm{Df}} (\alpha \dashv \alpha) \dashv \alpha$	[pág. 241]
Def L'':	$L\alpha =_{\mathrm{Df}} (\alpha = 1)$	[pág. 243]
Def $\dashv$:	$(\alpha \dashv \beta) =_{\mathrm{Df}} L(\alpha \supset \beta)$	[pág. 37]
Def $\dashv'$:	$(\alpha \dashv \beta) =_{\mathrm{Df}} \sim M(\alpha \cdot \sim \beta)$	[pág. 182]
Def $=$:	$(\alpha = \beta) =_{\mathrm{Df}} (\alpha \dashv \beta) \cdot (\beta \dashv \alpha)$	[pág. 37]

No enumeramos las definiciones de los operadores no modales.

Reglas

CP:	Si α es una fbf válida de CP, entonces $\vdash \alpha$[421]	[pág. 212]
MP:	$\vdash \alpha, \vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash \beta$	[Modus Ponens, pág. 28]
N:	$\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$	[Necesariedad, pág. 37]
L $\equiv$:	$\vdash (\alpha \equiv \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha \equiv L\beta)$	[RT4, pág. 110]
M $\equiv$:	$\vdash (\alpha \equiv \beta) \rightarrow \vdash (M\alpha \equiv M\beta)$	[RT5, pág. 112]
LA:	$\vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha \supset \beta)$	[RT6, pág. 113]
LC:	$\vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (\alpha \supset L\beta)$, si α está completamente modalizada	[RT7, pág. 113]
Eq:	$\vdash \alpha, \vdash (\gamma = \delta) \rightarrow \beta$, difiriendo β de α sólo en tener δ en algunos de los lugares en los que α tiene γ.	[Eq., pág. 182; RP1.2, pág. 206]

421 También diremos que una base contiene la regla CP si contiene un conjunto de axiomas y reglas no modales suficientes para el Cálculo Proposicional.

Adj: $\vdash \alpha, \vdash \beta \rightarrow \vdash (\alpha \cdot \beta)$ [pág. 182]

MP′: $\vdash \alpha, \vdash (\alpha \dashv \beta) \rightarrow \vdash \beta$ [pág. 182]

CPL′: Si α es una fbf válida de CP, o un axioma, entonces $\vdash L\alpha$ [RP1.1, pág. 206]

L $\dashv$: $\vdash (\alpha \dashv \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha \dashv L\beta)$ [RP2.1, pág. 207]

CPL: Si α es una fbf válida de CP entonces $\vdash L\alpha$ [pág. 213]

N $\supset$: $\vdash (\alpha \supset \beta) \rightarrow \vdash (\alpha \dashv \beta)$ [R2, pág. 242]

N $\equiv$: $\vdash (\alpha \equiv \beta) \rightarrow \vdash (\alpha \equiv \beta)$ [R,pág. 243]

$\supset / \dashv$: $\vdash \alpha \rightarrow \vdash \beta$, difiriendo β de α sólo en tener $\supset$ siempre que α tenga $\dashv$ [R4, pág. 242]

Axiomas Modales

A. *Axiomas para los sistemas de la Parte I*

1. $Lp \supset p$ [A5, pág. 37; AP1.2, pág. 206]
1a. $p \supset Mp$ [A11, pág. 112]
2. $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$ [A6, pág. 37; AP2.1, pág. 207]
3. $Lp \supset LLp$ [A7, pág. 50]
3a. $MMp \supset Mp$ [A14, pág. 113]
4. $Mp \supset LMp$ [A8, pág. 52; AP5.1, pág. 211]
4a. $M \sim Mp \supset \sim Mp$ [A15, pág. 115]
5. $p \supset LMp$ [B, pág. 59]
6. $(Lp \cdot Lq) \equiv L(p \cdot q)$ [A9, pág. 110]
6a. $M(p \vee q) \equiv (Mp \vee Mq)$ [A12, pág. 112]
7. $L(p \supset p)$ [A10, pág. 110]
8. $L(p \supset q) \supset L(Lp \supset Lq)$ [A13, pág. 112; AP3.1, pág. 210]

B. *Axiomas para los sistemas Lewis* (*si no aparecen en la lista anterior*)

(i) Axiomas originales de Lewis:

9. $(p \cdot q) \dashv (q \cdot p)$ [AS1.1, pág. 182]
10. $(p \cdot q) \dashv p$ [AS1.2, pág. 182; H2, pág. 204]
11. $p \dashv (p \cdot p)$ [AS1.3, pág. 182; H2, pág. 204]
12. $((p \cdot q) \cdot r) \dashv (p \cdot (q \cdot r))$ [AS1.4, pág. 182]
13. $((p \dashv q) \cdot (q \dashv r)) \dashv (p \dashv r)$ [AS1.5, pág. 182]
14. $(p \cdot (p \dashv q)) \dashv q$ [AS1.6, pág. 182]
15. $M(p \cdot q) \dashv Mp$ [AS2.1, pág. 192]
16. $(p \dashv q) \dashv (\sim Mq \dashv \sim Mp)$ [AS3.1, pág. 195; H6, pág. 204]
17. $Lp \dashv LLp$ [AS4.1, pág. 197]
18. $Mp \dashv LMp$ [AS5.1, pág. 198]

(ii) Para axiomatizaciones alternativas:

19. $LL(p \supset p)$ [pág. 224]
20. $((r \cdot p) \cdot \sim(q \cdot r)) \dashv (p \cdot \sim q)$ [H3, pág. 204]
21. $\sim Mp \supset \sim p$ [H4, pág. 204]
22. $p \dashv Mp$ [H5, pág. 204]
23. $(\sim M \sim p \dashv Mp) \dashv (p \dashv \sim M \sim Mp)$ [pág. 205]
24. $((p \dashv q) \cdot (q \dashv r)) \supset (p \dashv r)$ [AP1.1, pág. 206]

C. *Axiomas para otros sistemas basados en L o M (si no aparecen anteriormente)*

25. $p \dashv LMp$ [B′, pág. 214]
26. $p \dashv LLMp$ [B″, pág. 214]
27. $L_n p \supset L_{n+1} p$ [pág. 215]
28. $MLp \supset LMp$ [G1, pág. 216]
29. $L(Lp \supset Lq) \vee L(Lq \supset Lp)$ [D2, pág. 217]
30. $MLp \supset (((p \dashv Lp) \dashv Lp) \dashv Lp)$ [pág. 218n]
31. $((p \dashv Lp) \dashv Lp) \supset (MLp \supset Lp)$ [M1, pág. 218]
32. $((p \dashv Lp) \dashv p) \supset (MLp \dashv p)$ [N1, pág. 218]
33. $p \supset (MLp \supset Lp)$ [R1, pág. 218]
34. $LMLp \supset Lp$ [pág. 219]
35. $M(Lp \dashv LLp)$ [pág, 219]
36. $LMMp \dashv LMp$ [pág. 219]
37. $LMLp \dashv Lp$ [pág. 219]
38. $\sim Lp \supset L \sim Lp$ [pág. 219]
39a. $(LMp \cdot LMq) \supset M(p \cdot q)$ [Ka, pág. 220]
39b. $LMp \supset MLp$ [Kb, pág. 220]
39c. $LM(Mp \supset Lp)$ [Kc, pág. 220]
39d. $LML(p \supset Lp)$ [Kd, pág. 220]
39e. $LML(Mp \supset p)$ [Ke, pág. 220]
40. $p \supset L(Mp \supset p)$ [H1, pág. 220]
41. $((p \dashv Lp) \dashv p) \supset p$ [J1, pág. 220]
42. MMp [C13, pág. 221]
43. $LMMp$ [pág. 223]

D. *Axiomas para sistemas basados en* $\dashv$ o $=$

44. $q \dashv (p \dashv p)$ [M1, pág. 241]
45. $(((p \dashv q) \dashv r) \dashv q) \dashv ((q \dashv s) \dashv (p \dashv s))$ [M2, pág. 241]
46. $p \dashv p$ [pág. 242]

47. $(p \dashv (q \dashv r)) \dashv ((p \dashv q) \dashv (p \dashv r))$ [pág. 242]
48. $(q \dashv r) \dashv ((p \dashv q) \dashv (p \dashv r))$ [C3.1, pág. 242]
49. $\alpha \dashv (\beta \dashv \alpha)$, si α y β son estrictas [C3.2, pág. 242]
50. $\alpha \dashv (p \dashv \alpha)$, si α es estricta [C4.1, pág. 242]
51. $((\alpha \dashv p) \dashv \alpha) \dashv \alpha$, si α es estricta [C5.1, pág. 242]
52. $(p \dashv q) \dashv (s \dashv ((q \dashv r) \dashv (p \dashv r)))$ [C4′.1, pág. 242]
53. $((p \supset q) \supset p) \dashv p$ [C4′.2, pág. 242]
54. $(((p \dashv q) \dashv r) \dashv s) \dashv ((q \dashv s) \dashv (p \dashv s))$ [C5′.1, pág. 242]
55. $p \dashv (q \supset p)$ [C5′.2, pág. 242]
56. $(p \dashv (p \supset q)) \dashv (p \dashv q)$ [C5′.3, pág. 242]
57. $(p \dashv q) \dashv (p \supset q)$ [C5′.4, pág. 242]
58. $0 \dashv p$ [C5′.5, pág. 242]
59. $(p = q) \supset (\alpha \supset \beta)$, difiriendo β de α sólo en tener q en algunos de los lugares en los que α tiene p [I, pág. 243]

Bases axiomáticas

Al especificar las bases axiomáticas mencionamos primero el operador modal considerado como primitivo, a continuación las definiciones, luego las reglas y finalmente los axiomas, en cada caso citando el número o el símbolo adecuado de las listas precedentes. Cuando, sin embargo, un sistema, S′, se obtenga añadiendo alguna parte, m, a un sistema ya especificado, S, especificamos S′ como S + m. Se ha de presuponer que las bases que contengan CP tienen la regla MP. La regla de la sustitución uniforme para variables proposicionales se presupone siempre.

Utilizamos el símbolo "S4*" para axiomatizaciones de S4, tales como las ofrecidas en la I Parte en las que podía garantizarse que la regla de la Necesariedad era válida en todas las ampliaciones y reservamos "S4" para las axiomatizaciones del estilo de Lewis, en las que no puede garantizarse esto. Aunque no tenemos ninguna ampliación de S5 que tomar en consideración distinguimos análogamente entre S5* y S5.

A. *Sistemas de la Parte I*

T = {L, Defs M, $\dashv$, =, CP, N, 1, 2} (págs. 20 y s.)
- *o* {L, Defs M, $\dashv$, =, CP, L $\equiv$, 1, 6, 7} (págs. 110 y s.)
- *o* {M, Defs L, CP, N, M $\equiv$ 1a, 6a} (pág. 111)

S4* = T + 3 (o 3a) (págs. 50, 112)
- *o* {L, Defs M, $\dashv$, =, N, 1, 8} (págs. 111-12, 210-11)
- *o* {=, Def L'', CP, N $\equiv$, 59} (pág. 243)

S5* = T + 4 (o 4a) (págs. 52 y 115)
- *o* {L, Defs M, $\dashv$, CP, LA, LC} (pág. 113)
- *o* lo mismo con LA sustituida por 1 (pág. 113)
- *o* S4* + 5 (pág. 60)

El sistema Brouweriano = T + 5 (pág. 59)

B. *Los sistemas Lewis*

S1 = {*M*, Defs *L*, $\neg$', =, Eq, Adj, MP', 9–14} (pág. 181 y s.)
o lo mismo con 14 sustituido por 22 (pág. 182n)
o {*L*, Defs *M*, $\neg$, =, MP, CPL', Eq, 1, 24} (pág. 205)
S2 = S1 + 15 (pág. 192)
o {*L*, Defs *M*, $\neg$, =, MP, CPL', L $\neg$, 1, 2} (pág. 207)
S3 = S1 + 16 (pág. 195)
o {*M*, Defs *L*, $\neg$', =, MP, L1, 10, 20, 21, 22, 16} (pág. 204)
o {*L*, Defs *M*, $\neg$ =, MP, CPL', 1, 8} (pág. 210)
S4 = S1 + 17 (pág. 197)
o S3 + N (pág. 197)
o S3 + 19 (pág. 224)
(Véase también más adelante, después de C5')

S5 = S1 + 18 (pág. 198)
o S4 + 25 (pág. 214)
o S1 + 26 (pág. 214)
o S3 + 23 (pág. 205)
(Véase también más adelante, después de C5')

Se mantienen las siguientes relaciones entre los sistemas Lewis y los sistemas de A anteriores:

S4* = S4; S5* = S5
S1 + N = S1 + 19 = T
S1 + 25 = El sistema Brouweriano (T + 5)
S4* + 5 = S4 = 25 = S5

C. *Otros sistemas basados en L o M*

S0.5 = {*L*, Defs *M*, $\neg$, =, CPL, MP, 1, 2} (pág. 213)
$S4_n$ = T + 27 (pág. 215 y s.)
$T_n^+ = S4_n + 5$ (pág. 216)
S4.2 = S4 + 28 (pág. 216)
S4.3 = S4* + 29 (pág. 217)
S4.1 = S4* + 32
S4.1.1 = S4* + 31
S4.2.1 = S4.2 + 32
S4.3.1 (D) = S4.3 + 32
o S4.3 + 30
S4.4 = S4* + 33
(pág. 218 y s.)
S4.5 = S4* + 34 (= S5) (pág. 219)

S3.1 = S3 + 35
S3.2 = S3 + 36
S3.3 = S3 + 37
S3.5 = S3 + 38 (pág. 219)

K1 = S4* + cualquiera de los 39a–e (pág. 220)

K1.1 = S4* + 41
K1.2 = S4* + 40
K2 = S4* + 28 + 39b
K2.1 = S4.1 + 41
K3 = K2 + 29
K3.1 = S4.3 + 41
K4 = S4.4 + 39b (pág. 220)

S6 = S2 + 42
S7 = S3 + 42
S8 = S3 + 43
S9(S7.5) = S3.5 + 42 (págs. 222-23)

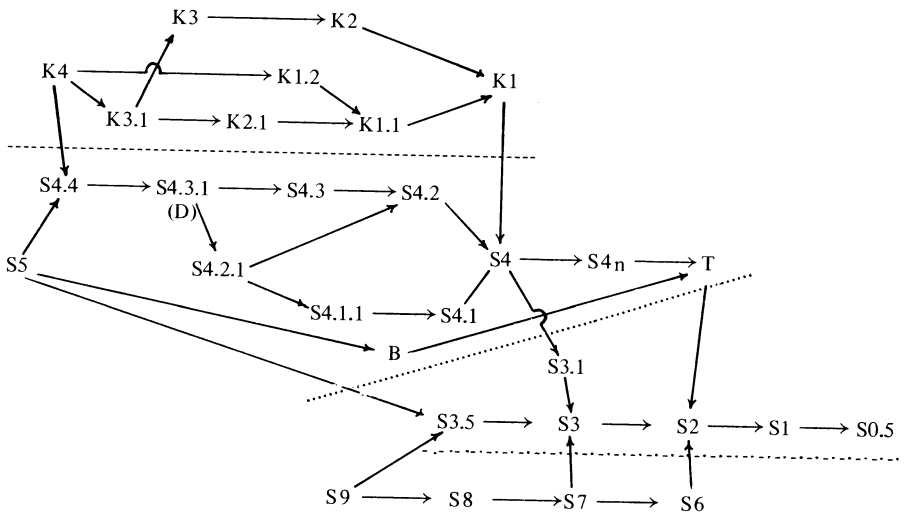
D. *Sistemas con* $\neg\exists$ *como primitivo*

C3 = { $\neg\exists$, MP′, 46–49 }
C4 = { $\neg\exists$, MP′, 46, 47, 50 }
C5 = C4 + 51
o { $\neg\exists$, MP′, 44, 45 } (págs. 241-42)

(Puede añadirse Def L' a C4 y Def L' y Def M' a C5)

C4′ = {$\neg\exists$, MP′, N $\supset$, $\supset/\neg\exists$, 52, 53, 56, 57 }
C5′ = { $\neg\exists$, MP′, N $\supset$, $\supset/\neg\exists$, 54–57
C4′ + 58 + Def L' + Def M = S4
C5′ + 58 + Def L' + Def M = S5 (pág.242)

El siguiente diagrama ilustra la relación que se mantiene entre la mayoría de los sistemas de la lista anterior. La notación S → S′ significa que S contiene a, pero no está contenido en, S′.



Los sistemas que están encima de la línea - - - - - y los que están debajo de la línea - - - - - - ni contienen a, ni están contenidos en S5; todos los demás sistemas están contenidos en S5. Los sistemas que están por encima de la línea . . . . (aquéllos que contienen a T) tienen la regla $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$; los que están por debajo de esta línea no la tienen. Los sistemas que están debajo de la línea - - - - - - son inconsistentes con la regla $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$.

APENDICE IV

NOTACION

La notación que hemos usado a través de todo este libro es sólo una de las muchas en uso. Para la lógica no modal, tanto en los cálculos proposicionales como de predicados, utilizamos la notación de *Principia Mathematica*, con la excepción de que usamos el paréntesis "literario" en vez del sistema de puntos que allí se utiliza. Nuestra notación modal tiene diversas fuentes. M como operador de posibilidad fue utilizado por Oskar Becker en 1930[422], y L como operador de la necesidad fue utilizado por Robert Feys en 1950[423], mientras que $\dashv$ y $=$ como implicación estricta y equivalencia estricta se derivan de Lewis[424]. Los cuatro son de uso común hoy en día, aunque hay probablemente una tendencia por parte de los autores que usan $\dashv$ y $=$ a usar $\Diamond$ y $\Box$[425] en lugar de nuestro M y L respectivamente. Nuestra principal razón para preferir M y L es que son más fáciles de escribir. Como operador de la equivalencia estricta, $\equiv$[426] se ha convertido en un fuerte rival de $=$. Presenta muchos tantos a su favor ya que minimiza la posibilidad de confusión con otros usos de $=$ (por ejemplo como signo de identidad) por lo que hemos estado a punto de adoptarlo.

Para facilitar la comprensión cuando citamos los resultados de otros autores normalmente hemos traducido su notación a la nuestra y el lector que consulte los originales debe esperar encontrar muchas fórmulas que le parecerán extrañas si éste es el único libro de lógica modal que ha estudiado. Por consiguiente enumeramos aquí, de por lo menos las obras más importantes a las que nos hemos referido, los principales aspectos en que su notación difiere de la nuestra. Sin embargo no indicaremos siempre las divergencias en la notación no modal. Disponemos la lista por orden alfabético de autores. La referencia completa se encontrará en la Bibliografía.

BARCAN [1946] (y posteriormente) utiliza $\Box$ para L, $\Diamond$ para M y $\equiv$ para $=$.
CARNAP [1946] utiliza N para L.
DUMMETT AND LEMMON [1959]: véase más adelante LEMMON [1960a].

---

422 Becker [1930]. También se usa M como operador en la lógica trivalente de Łukasiewicz and Tarski [1930] y estaba probablemente en uso en la Polonia de antes de la guerra.

423 El uso más antiguo de L como operador monádico de la Necesidad que hemos podido encontrar aparece en Feys [1950]. Feys afirma que está utilizando la notación de Łukasiewicz y por tanto el símbolo bien puede datar de mucho más antiguo.

424 $\dashv$ data de Lewis [1918] y $=$ de Lewis [1912]

425 $\Diamond$ aparece por vez primera en Lewis and Langford [1932]. El primer uso publicado de $\Box$ aparece en Barcan [1946], pero el signo en sí fue inventado un poco antes por F. B. Fitch para proporcionar un símbolo de la necesidad del mismo estilo tipográfico que el diamante de Lewis. (Agradecemos a los Profesores Barcan Marcus y Fitch el habernos proporcionado por carta esta información).

426 Este símbolo aparece en MacKinsey [1941].

FEYS [1937] utiliza A para L, E para M y (como operadores no modales) N para $\sim$, V para $\vee$, & para $\cdot$, F para $\supset$ y H para $\equiv$. Feys consigue aquí el efecto de nuestra Def M estableciendo como ley (pág. 534) la equivalencia 24.1: Ap H NENp. Nuestro A5 es dado en la forma (23.11, pág. 533) p F Ep, y A6 en la forma importada (25.3, pág. 535) A (p F q) . & . Ap : F : Aq. La regla de la Necesariedad es 25.2 (pág. 534): "D'une loi logique p on peut conclure à une loi logique Ap". Al sistema así obtenido él lo denomina "logique t" (pág. 536). Con la adición de su 26.5, Ep . F . AEp (nuestro A8) proporciona S5, y con la adición de una fórmula (28.43) que él escribe como Arp . F . Ar^2p proporciona S4 (pág. 537). Feys denomina a S4 "logique r".

FEYS [1965] utiliza $\Box$ para L, $\Diamond$ para M, $\Rightarrow$ para $\dashv$ y $\Leftrightarrow$ para $=$. Entre los operadores no modales utiliza $\wedge$ para $\cdot$, $\rightarrow$ para $\supset$ y $\leftrightarrow$ para $\equiv$, y en CEP (pág. 147), $\boldsymbol{Ax}$ para (x), $\boldsymbol{Ex}$ para $(\exists x)$, y a, b, ... para ϕ, ψ, ...

FITCH [1952] utiliza $\Box$ para L, $\Diamond$ para M y $\equiv$ para $=$.

HACKING [1963] utiliza $\supset$ para $\dashv$.

KRIPKE [1963a, b] utiliza $\Box$ para L, $\Diamond$ para M, $\wedge$ para $\cdot$, y $P^n, Q^n, \ldots$ como variables predicativas n-ádicas. Establece todos los axiomas como esquemas, con $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ... como variables para fbfs. Nuestros A5, A6, A7, A8 son sus A1, A3, A4, A2 respectivamente; se refiere a MP como R1 y a N como R2.

LEMMON [1957] utiliza la notación polaca para CP, con L y M como operadores de la necesidad y la posibilidad y C' para la implicación estricta. Su numeración de los axiomas y reglas (pág. 177) se corresponde con la nuestra (págs. 206-210) como sigue: nuestro AP1.1 = su (3); AP1.2 = (2); RP1.1 = (a'); RP1.2 = (b'); AP2.1 = (1'); RP2.1 = (b); AP3.1 = (1).

LEMMON [1960a] utiliza $\Box$ para L y $\Diamond$ para M; $\cup$, $\cap$ y $-$ para $+$, $\times$ y $-$ respectivamente; M para K; $x, y, \ldots$ para miembros de M; y **E** para $*$. Lemmon denomina a las álgebras T *álgebras de extensión* (de ahí su uso de **E** para $*$). En DUMMETT AND LEMMON [1959] se utiliza notación y terminología similares. En las álgebras de clausura (S4) se utiliza **C** en lugar de **E** para $*$, y un interior, I, se define como $-\mathbf{C}-$.

LEWIS AND LANGFORD [1932] utiliza $\Diamond$ para M, $\dashv$ y $=$ tal como fueron usados en este libro y p $\bigcirc q$ para "p es consistente con q" (es decir $M(p \cdot q)$). Estos autores no tienen ningún símbolo de la necesidad sino que escriben siempre $\sim\Diamond\sim$[427].

ŁUKASIEWICZ [1953] utiliza notación polaca con Γ para L y Δ para M.

MCKINSEY [1941] utiliza $x, y, \ldots$ para los miembros de K y $<$ para la inclusión. Utiliza $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ de modo que $x \rightarrow y = - * (x \times -y)$ y $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \times (y \rightarrow x)$. Por lo demás su notación (para el álgebra Booleana) es igual a la nuestra. Para los operadores proposicionales sigue a Lewis y Langford [1932] excepto en que utiliza $\equiv$ para $=$.

PARRY [1939] sigue a Lewis y Langford [1932].

PRIOR [1955] (y siempre) utiliza la notación polaca, con L y M como operadores de la necesidad y la posibilidad y C' y E' para la implicación estricta y la equivalencia estricta. En CEP se utiliza Πx para (x), Σx para $(\exists x)$ y Ixy para $x = y$.

---

427 Lewis en sus primeros artículos utilizaba la notación de *Principia Mathematica* pero la interpretaba en un sentido estricto. (En [1914b], pág. 590n, explicó que esto fue por razones tipográficas). Interpretaba $\sim p$ como "p es imposible" y para "p es falso" escribía $-p$; como signo de implicación material utilizaba $<$. En Lewis [1918] $\dashv$ sustituía a $\supset$ como signo de implicación estricta. La primera aparición de $\Diamond$ fue en Lewis and Langford [1932].

En PRIOR [1963a] se utiliza Fpq para $p \dashv q$.

SCROGGS [1951] sigue a McKinsey [1941].

SIMONS [1953] utiliza la notación de Lewis y Langford [1932], excepto en que utiliza $\wedge$ para la conjunción y establece los axiomas como esquemas.

SOBOCIŃSKI [1953] utiliza notación polaca, con L y M como operadores de la necesidad y la posibilidad. (En artículos posteriores utiliza $\mathfrak{E}$ para la implicación estricta (LC) y $\mathfrak{C}$ para la equivalencia estricta (LE)).

VON WRIGHT [1951] utiliza M tal como nosotros lo hacemos pero usa N para nuestro L; a, b, c,... como variables proposicionales; y &, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ para $\cdot$, $\supset$ y $\equiv$ respectivamente.

APENDICE V

LAS ESTRUCTURAS MODELO DE KRIPKE Y LOS CONJUNTOS MODELO DE HINTIKKA

Las estructuras modelo y los modelos en la semántica de Kripke

El sistema de modelos semánticos que hemos utilizado extensivamente en este libro se deriva esencialmente de la obra de Kripke. Nos hemos apartado en varios sentidos de su notación, terminología, y el método general de disponer de su material, y damos ahora una breve reseña de ellos.

Kripke define una *estructura modelo normal*[428] como un triple ordenado (**G**, **K**, ***R***) donde **K** es un conjunto no vacío, **G** es un miembro de **K** y ***R*** es una relación reflexiva que abarca a todo **K**. Esto proporciona una estructura modelo M (al sistema que nosotros denominamos T él lo denomina M); S4, S5 y las estructuras modelo *Brouwersche* se obtienen exigiendo además que ***R*** sea transitiva, transitiva y simétrica, y simétrica, respectivamente. **K** corresponde a nuestro MU, **G** a algún $mu_i \in$ MU (Kripke utiliza las letras **G**, **H**... como nosotros utilizamos, mu_i, mu_j, ...), y ***R*** es por supuesto nuestra R.

Dada una estructura de modelo (**G**, **K**, ***R***) obtenemos un *modelo* para una fbf, A, añadiendo una función $\Phi(P, \mathbf{H})$ (nuestra V) cuyo primer argumento, P, abarca todas las fórmulas atómicas (variables proposicionales) de A, cuyo segundo argumento, **H** abarca todos los miembros de **K**, y cuyos valores son los miembros del conjunto {**T**, **F**} (nuestro {1, 0}). Es decir cuando P es una variable proposicional de A y **H** es un miembro de **K**, en cada caso o bien $\Phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$ o $\Phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$. Dado $\Phi(P, \mathbf{H})$ tal como se definió para cada fórmula atómica de A y cada $\mathbf{H} \in \mathbf{K}$, entonces cuando B es cualquier sub-fórmula (parte bien-formada) de A, $\Phi(B, \mathbf{H})$ se define inductivamente como sigue: (Kripke usa $\wedge$ para $\cdot$ y $\Box$ para L).

Si B es una fórmula atómica, $\Phi(B, \mathbf{H})$ ya está definida. Si $\Phi(B, \mathbf{H}) = \Phi(C, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$, entonces $\Phi(B \wedge C, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$; en caso contrario $\Phi(B \wedge C, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$. Si $\Phi(B, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$, entonces $\Phi(\sim B, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$; de lo contrario $\Phi(\sim B, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$. Si $\Phi(B, \mathbf{H}') = \mathbf{T}$ para todo $\mathbf{H}'$ tal que $\mathbf{H}R\mathbf{H}'$, entonces $\Phi(\Box B, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$; de lo contrario $\Phi(\Box B, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$[429].

Por consiguiente podemos evaluar $\Phi(A, \mathbf{H})$ como **T** o **F** para cada $\mathbf{H} \in \mathbf{K}$. Se dice que A es *verdadera* en un modelo Φ asociado con una estructura de modelo (**G**, **K**, ***R***) si $\Phi(A, \mathbf{G}) = \mathbf{T}$; *falsa* en ese modelo si $\Phi(A, \mathbf{G}) = \mathbf{F}$. Se dice que A es *válida* SI es verdadera en todos sus modelos (para cada estructura de modelo).

Lo que en este libro hemos denominado modelo es un concepto más amplio que lo que Kripke denomina modelo. Modelo en el sentido que él lo entiende es un modelo en el sentido que nosotros lo entendemos pero con algún "mundo" parti-

---

428 Kripke [1963a], pág. 68.

429 Estas condiciones son evidentemente las mismas que las establecidas para V en la pág. 71, con la diferencia trivial de que Kripke considera a la conjunción como símbolo primitivo en lugar de la disyunción.

cular elegido para especial consideración. La verdad en un modelo (en el sentido de Kripke) es la verdad en ese mundo designado en el modelo correspondiente (en el sentido nuestro). Por tanto la definición de validez como verdad en todo modelo (en el sentido suyo) es precisamente equivalente a su definición como verdad en todo mundo en todo modelo (en el sentido nuestro); es decir su definición y la nuestra proporcionan exactamente las mismas fórmulas como válidas.

Para otros sistemas modales las diferencias entre el tratamiento que les da Kripke y el nuestro son análogas a las acabadas de describir.

Los "conjuntos modelo" de Hintikka

Otra manera de formular la definición de la validez en los sistemas modales es la desarrollada por K. J. J. Hintikka[430]. Aunque no hemos utilizado sus métodos en este libro su obra ha demostrado que pueden emplearse con éxito en el estudio de la lógica modal, y por consiguiente damos aquí una breve reseña de ellos.

Hintikka define un *sistema modelo*, Ω, como un conjunto de *conjuntos modelo*, μ, ν, ..., relacionados mediante lo que él denomina relación de *alternatividad* (alternativeness) (una relación diádica correspondiente a la **R** de la semántica de Kripke). Los conjuntos modelo así relacionados con un conjunto modelo, μ, se dice que son *alternativos* de μ. Un conjunto modelo es un conjunto, μ, de fórmulas que satisface las siguientes condiciones[431]:

(C · ~)	Si μ contiene una fórmula átomica o una identidad, no contiene su negación.
(C · &)	Si $(\boldsymbol{F} \,\&\, \boldsymbol{G}) \in \mu$, entonces $\boldsymbol{F} \in \mu$ y $\boldsymbol{G} \in \mu$.
(C · ∨)	Si $(\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{G}) \in \mu$, entonces $\boldsymbol{F} \in \mu$ o $\boldsymbol{G} \in \mu$.
(C · E)	Si $(Ex)\,\boldsymbol{F} \in \mu$, entonces $\boldsymbol{F}(a/x) \in \mu$ para al menos un símbolo a individual libre. (Aquí $\boldsymbol{F}(a/x)$ es el resultado de sustituir x en todas partes por a en $\boldsymbol{F}$).
(C · U)	Si $(Ux)\,\boldsymbol{F} \in \mu$ y b es un símbolo individual libre que aparece en al menos una fórmula de μ, entonces $\boldsymbol{F}(b/x) \in \mu$.
(C · auto ≠)	μ no contiene ninguna fórmula de la forma $\sim(a = a)$.
(C · =)	Si $\boldsymbol{F} \in \mu$, $(a = b) \in \mu$ y si $\boldsymbol{G}$ es igual que $\boldsymbol{F}$ excepto en el intercambio de a y b en algunas de sus apariciones, (o todas), entonces $\boldsymbol{G} \in \mu$ siempre que $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ sean fórmulas atómicas o identidades.
(C · N)	Si $N\boldsymbol{F} \in \mu \in \Omega$, entonces $\boldsymbol{F} \in \mu$.
(C · M*)	Si $M\boldsymbol{F} \in \mu \in \Omega$, entonces existe en Ω al menos un alternativo de μ que contiene a $\boldsymbol{F}$.
(C · N⁺)	Si $N\boldsymbol{F} \in \mu \in \Omega$ y si ν es un alternativo de μ en Ω, entonces $\boldsymbol{F} \in \nu$.

(El establecer de esta forma las condiciones presupone que tengamos reglas para reducir fórmulas no atómicas negadas a fórmulas en las que los signos de negación son prefijos únicamente de fórmulas atómicas o identidades; mas los sistemas habituales cuentan con tales reglas).

Se dice que una fórmula, $\boldsymbol{F}$, es *satisfactible* SI pudiese ser miembro de algún conjunto modelo en algún sistema modelo, y que es *válida* SI su negación es insatis-

---

430 Hintikka [1961], [1963].

431 Hintikka utiliza $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ para fórmulas, & para ., (Ex) para $(\exists x)$, (Ux) para (x), y N para L. Su término "fórmula atómica" incluye tanto variables proposicionales como fórmulas atómicas de CEP. Las condiciones tal como se establecen aquí se encuentran en su [1963], págs. 66-67.

factible –es decir SI su negación no podría ser miembro de ningún conjunto modelo en ningún sistema modelo.

El sistema determinado por estas condiciones es, por supuesto, sólo uno de los muchos sistemas modales posibles. De hecho se trata de CEP + T sin la fórmula Barcan y con la identidad contingente. Pueden obtenerse, sin embargo, otros sistemas ya bien imponiendo los requisitos ya conocidos de la transitividad, simetría, etc. en la relación de alternatividad o modificando de diversos modos las condiciones para ser un conjunto modelo[432].

[432] Ha habido otros diversos estudios semánticos de la lógica modal. Entre los más antiguos figuran los de McKinsey [1945], que se discute brevemente en la nota 407 y los de Carnap [1946]. Carnap, sin embargo, trató sólo con S5. La explicación de Kanger (en [1957a] y en todas las demás partes) es muy semejante a la de Kripke excepto en la terminología. La mayor parte de los trabajos recientes han seguido a Kripke o se han desarrollado de forma muy similar.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

En la mayoría de los casos estas soluciones son poco más que sugerencias acerca de cómo proceder y en algunos casos no se dan soluciones en absoluto.

Ejercicios – 2 (pág.46)

2.1. (a) CP21 (Sil) x RD1 x A6 x Def $\dashv$ x Imp (CP23)
(b) $(p \supset q) \supset ((p \cdot r) \supset (q \cdot r))$ x RD1 x T8 x Imp (CP23)
(c) T15 (Forma Implicacional) x CP26
(d) T7 x Def $\supset$ y ILM
(e) T7, T1
(f) Ejercicio 2.1 (d), T10, CP22 $[Lp/p, M(p \cdot q)/q, Mp \cdot Mq/r], (p \supset (q \cdot r)) \supset ((p \supset q) \cdot (p \supset r))$.

2.2. Prueba mediante inducción en la construcción de A (cf. nota 10) utilizando RD1, RD3, CP10.

2.3. Sea $\alpha, p \supset Lp$.

2.4. (a) La prueba como la de la consistencia de T (pág. 45 y s.) advirtiendo que la transform-CP de $Lp \vee L \sim p$ es también válida CP.
(b) Utilizar $Lp \vee L \sim p$ y el resto de la base de T para derivar $p \supset Lp$.

Ejercicios – 3 (pág. 61)

3.1. (a) CP14, A2 $[Lp/p, Lq/q]$ x RD1 x A7 x Sil x CP27.
(b) A13 (pag. 112) $[p \equiv q/p, r/q]$, x R4 (T19) x T4.

3.2. Mediante inducción como en 2.2 pero utilizando A13 (pág.112) en lugar de RD1.

3.3. Demostrar $((p \supset p) \dashv q) \equiv ((p \supset p) = q); Lq \supset ((p \supset p) = q); (L(p \supset p) = Lq) \supset LLq$; y utilizarlos y $((p = q) \supset (Lp = Lq)$ para obtener A7. Utilizar la prueba de A13 para obtener $(p = q) \supset (Lp = Lq)$ en S4.

3.4. (a) Demostrar $(Lp \dashv Lq) \equiv (Lp \supset Lq)$ (a partir de T30) y utilizar $(p \supset q) \vee (q \supset p)$.
(b) Demostrar primero $L(Mp \supset Lq) \supset L(p \supset Lq)$ (T1, RD1, CP) y luego $L(Mp \supset q) \supset L(Mp \supset Lq)$ (T29, Def $\supset$). Para la implicación inversa demostrar $L(p \supset Lq) \supset L(Mp \supset Lq)$ y $L(Mp \supset Lq) \supset L(Mp \supset q)$.

3.5. (a) $L(p \vee q) \cdot (L(p \vee r) \vee Ls)$
(b) $(Lp \vee L \sim (p \cdot q) \vee Mq) \cdot (M \sim q \vee L \sim (p \cdot q) \vee Mq)$
(c) $(M(p \cdot q) \vee L(\sim p \vee q) \vee L(\sim p \vee \sim q)) \cdot (M(p \cdot \sim q) \vee L(\sim p \vee q) \vee L(\sim p \vee \sim q))$
(d) $(M(p \vee q) \vee M \sim (p \vee q) \vee Lr) \cdot (M(p \vee q) \vee \sim r \vee L(p \supset p))$
(e) $(Mq \vee M(p \cdot \sim q) \vee L \sim p \vee Lp) \cdot (L \sim p \vee Lp \vee M(p \cdot \sim q) \vee L \sim p \vee Lp))$

Ejercicios – 4 (págs. 76-77)

4.1. (a) (b) *vide* pág. 65 (siendo $n = 2$).

(c) Sean A y B dos modalidades distintas cualesquiera de la lista de las catorce. En cada caso proporcionar una jugada S4 que muestre que $Ap \equiv Bp$ es no válida.

4.2. (b) Mostrar que una jugada que es a la vez una jugada Brouweriana y una jugada S4 es también una jugada S5 utilizando la nota a pie de página número 39.

4.3. *Vide* pág.237 y s.(S4.3).

4.4. *Vide* págs. 226-229 (S2).

4.5. *Vide* págs. 217-229 (S3).

4.6. *Vide* pág. 231-232.

Ejercicios – 5 (pág.94 y s.)

5.2. Sea la fórmula no válida $p \supset L((p \supset p) \supset p)$

5.3. (a) no válida; (b) válida; (c) válida; (d) no válida.

5.5. *Vide* pág. 83

5.6. *Vide* pág. 91 y s.

Ejercicios – 6 (pág. 109)

6.1. (a) no válida; (b) no válida; (c) no válida; (d) no válida; (e) válida; (f) válida.

6.3. (a) no válida; (b) válida; (c) válida; (d) válida; (e) no válida.

6.4. (a) La FNCM ordenada es $(\sim q \vee L(p \supset r) \vee Mp) \cdot (\sim q \vee L(p \supset r) \vee M \sim (q \supset r)$. No válida (la segunda parte de la conjunción no es válida).

(b) La FNCM ordenada es $(L(p \supset q) \vee Lr \vee M(\sim(p \supset q) \vee \sim(q \supset p))) \cdot (L(q \supset p) \vee Lr \vee M(\sim(p \supset q) \vee \sim(q \supset p))) \cdot (L \sim r \vee Lr \vee M(\sim(p \supset q) \vee \sim(q \supset p)))$. No válida (la última parte de la conjunción no es válida).
Válida. La FNCM ordenada es $(L \sim p \vee Lp \vee Lp \vee M \sim p) \cdot (Lp \vee M(\sim p \vee \sim p))$.

Ejercicios – 7 (págs. 115-116)

7.1. (a) Demostrar RT4 en T'' (usando RD1 y CP15, CP16).

(b) Interpretar Lp como $(p \cdot \sim p)$ y demostrar que en ese caso toda fórmula obtenible sin A10 es válida pero A10 no lo es.

7.2. (a) Demostrar que M contiene a T' (utilizar ILM y De Morgan).

(b) Utilizar ILM para derivar RT4 en M* y luego demostrar RT3 a partir de ella como si fuese en T'.

7.3. (a) Para la Necesariedad sean tanto α como $\beta(p \supset p)$ y utilícese A10 y CP. Para A6 sea α, p, β sea $(p \supset q)$ y γ sea q, y utilícese CP.

(b) La Necesariedad se demuestra como en T*. Para A6 primero demostrar $(Lp \cdot L(p \supset q)) \supset q$ (utilizando A5 y CP) y continuar como en T*. Para A7 sean α, β, p y sea γ, Lp y utilícese CP (La prueba de que T contiene a T* y de que S4 contiene a S4* debe resultar evidente).

7.4. (a) *Vide* págs. 214-215 (B es $p \supset LMp$ y se sigue de B'' de acuerdo con A5).

(b) Utilizar A11 y A8 para obtener $LM(p \supset p)$, que puede ser utilizado como A10 se utilizó para demostrar RT3 en M*.

BIBLIOGRAFIA

Después de cada "item" aparece una lista de los números de las notas al pie en las que se hace referencia al "item" en cuestión. Todas las referencias a esta bibliografía están en las notas a pie de página.

Abreviaturas

JSL *The Journal of Symbolic Logic*, Association for Symbolic Logic, Providence, Rhode Island.
LA *Logique et Analyse*, E. Nauwelearts, Louvain.
NDJ *Notre Dame Journal of Formal Logic*, University of Notre Dame, Notre Dame, Indiana.
ZML *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

ACKERMANN, W.
[1956] Begrundung einer strengen Implikation. *JSL* Vol. 21 (1956) pp. 113-128 (**337, 341**).

ALBAN, M. J.
[1943] Independence of the primitive symbols of Lewis's calculi of propositions. *JSL* Vol. 8 (1943) pp. 24-26 (**293, 320**).

AMBROSE, A. and LAZEROWITZ, M.
[1948] *Fundamentals of symbolic logic*, New York, Rinehart & Co., 1948 (**1**).

ANDERSON, A. R.
[1954] Improved decision procedures for Lewis's calculus S4 and Von Wright's calculus M. *JSL* Vol. 19 (1954) pp. 201-214. (**48, 56**). (Corrección en *ibid.* Vol. 20 (1955) p. 150).
[1956] Independent axiom schemata for S5. *JSL* Vol. 21 (1956) pp. 255-256 (**234**).
[1957] Independent axiom schemata for Von Wright's M. *JSL* Vol. 22 (1957) pp. 241-244 (**232**).
[1960] Completeness theorems for the system E of entailment and EQ of entailment with quantification. *ZML* Vol. 16 (1960) pp. 201-216 (**348**).
[1963] Some open problems concerning the system E of entailment. *Acta Philosophica Fennica* (1963) *Modal and Many-valued Logics* pp. 7-18 (**342**).

ANDERSON, A.R. and BELNAP, N. D.
[1959a] Modalities in Ackermann's 'Rigorous Implication'. *JSL* Vol. 24 (1959) pp. 107-111 (**341, 347**).
[1959b] A simple treatment of truth-functions. *JSL* Vol. 24 (1959) pp. 301, 302 (**344**).
[1962a] Tautological entailments. *Philosophical Studies* Vol. 13 (1962) pp. 9-24 (**342**).
[1962b] The pure calculus of entailment. *JSL* Vol. 27 (1962) pp. 19-52 (**339, 345**).

ANDERSON, A. R., BELNAP, N. D. and WALLACE, J. R.
[1960] Independent axiom schemata for the pure theory of entailment. *ZML* Vol. 6 (1960) pp. 93-95 (**340**).

ANDERSON, J. M. and JOHNSTONE, H. W.
[1962] *Natural deduction.* Wadsworth Publishing Co. Inc., Belmont, California, 1962 (**409**).

ÅQVIST, L.
[1964] Results concerning some modal systems that contain S2. *JSL* Vol. 29 (1964) pp. 79-87 (**201, 242, 278, 301, 302, 312**).

ARISTOTLE
[B.C. 350] *Prior analytics.* (Tr. A. J. Jenkinson, Oxford University Press, 1928) (**168**).

BARCAN, R. C. (Mrs. J. A. Marcus)

[1946] A functional calculus of first order based on strict implication. *JSL* Vol. 11 (1946) pp. 1-16 (**87, 304, 425**).
[1947] The identity of individuals in a strict functional calculus of second order. *JSL* Vol. 12 (1947) pp. 12-15 (**141, 304**).
[1950] The elimination of contextually defined predicates in a modal system. *JSL* Vol. 15 (1950) p. 92 (**304**).
[1962] Interpreting quantification. *Inquiry* Vol. 5 (1962) pp. 252-259 (**121**).
[1963] Classes and atributes in extended modal systems. *Acta Philosophica Fennica* (1963) *Modal and Many-valued Logics* pp. 123-135 (**167**).
[1967] Essentialism in modal logic. *Noûs* Vol. 1 (1967) pp. 91-96 (**166**).

BAYART, A.
[1958] La correction de la logique modale du premier et second ordre S5., *LA* Vol. 1 (1958) pp. 28-44 (**42, 92**).
[1959] Quasi-adéquation de la logique modale de second ordre S5 et adéquation de la logique modale de premier ordre S5. *LA* Vol. 2 (1959) pp. 99-121 (**117**).

BECKER, O.
[1930] Zur Logik der Modalitäten. *Jahrbuch für Philosophie und Phänomenologische Forschung.* Vol. 11 (1930) pp. 497-548 (**25, 29, 37, 186, 210, 215, 217, 249, 254, 364, 422**).
[1952] *Untersuchungen über den Modalkalkül.* Westkulturverlag Anton Heim, Meisenheim am Glan, 1952.

BELNAP, N. D.
Vide Anderson and Belnap.
Vide también Anderson, Belnap and Wallace.

BENNET, J. F.
[1954] Meaning and implication. *Mind* Vol. 63 (1954) pp. 451-463 (**420**).
[1965] Review of Anderson and Belnap [1962b] and Smiley [1959] *JSL* Vol. 30 [1965] pp. 240-241 (**420**).

BERGMANN, G.
[1948] Contextual definitions in non-extensional languages. *JSL* Vol. 13 (1948), p. 140.
[1949a] The finite representations of S5. *Methodos* Vol. 1 (1949) pp. 217-219 (**400**).
[1949b] A syntactical characterization of S5. *JSL* Vol. 14 (1949) pp. 173-174.

BETH, E. W. and NIELAND, J. J. F.
[1965] Semantic construction of Lewis's systems S4 and S5. *The Theory of Models* (ed J. W. Addison, L. Henkin, A. Tarski) Amsterdam, North Holland Publishing Co., 1965, pp. 17-24 (**327**).

BOCHEŃSKI, I. M.
[1961] *A history of formal logic.* (Translated and edited by Ivo Thomas) Notre Dame. University of Notre Dame Press, 1961 (**168**).

BRONSTEIN, D. J. and TARTER, H.
[1934] Review of Lewis and Langford's *Symbolic logic. The Philosophical Review* Vol. 43 (1934) pp. 305-309 (**334**).

BULL, R. A.
[1964a] A note on the modal calculi S4.2 and S4.3. *ZML* Vol. 10 (1964) pp. 53-55 (**263**).
[1964b] An axiomatization of Prior's modal calculus Q. *NDJ* Vol. 5 (1964) pp. 211-214 (**360**).
[1965a] An algebraic study of Diodorean modal systems. *JSL* Vol. 30 (1965) pp. 58-64 (**268, 316**).
[1965b] A modal extension of intuitionist logic. *NDJ* Vol. 6 (1965) pp. 142-146 (**363**).
[1965c] A class of extensions of the modal system S4 with the finite model property. *ZML* Vol. 11 (1965) pp. 127-132 (**263**).
[1966a] That all normal extensions of S4.3 have the finite model property. *ZML* Vol. 12 (1966) pp. 341-344 (**263**).
[1966b] MIPC as the formalization of an intuitionist concept of modality. *JSL* Vol. 31 (1966) pp. 609-616 (**363**).

CANTY, J. T.
[1964] A natural deduction system for modal logic. *NDJ* Vol. 5 (1964) pp. 199-210 (**414**).
[1965] Systems classically axiomatized and properly contained in Lewis's S3. *NDJ* Vol. 6 pp. 309-318 (**232**).

CARNAP, R.
[1946] Modalities and quantification. *JSL* Vol. 11 (1946) pp. 33-64 (**35, 42, 63, 432**).
[1947] *Meaning and necessity*, Chicago, University of Chicago Press, 1947 (**150**).
CHISHOLM, R.
[1967] Identity through possible worlds: some questions. *Noûs* Vol. 1 (1967) pp. 1-8 (**122**).
CHURCH, A.
[1936] A note on the *Entscheidungsproblem*. *JSL* Vol. 1 (1936) pp. 40-41 (corrección en *ibid.* pp. 101-102) (**77, 97**).
[1951] A formulation of the logic of sense and denotation. *Structure, Method and Meaning* (ed. P. Henle, H. M. Kallen, S. K. Langer), Liberal Arts Press, New York, 1957 (**150**).
[1956] *Introduction to mathematical logic Vol. I.* Princeton, Princeton University Press, 1956 (**1, 7, 8, 9, 74, 77, 95, 318**).
CHURCHMAN, C. W.
[1938] On finite and infinite modal systems. *JSL* Vol. 3 (1938) pp. 77-82 (**210, 218, 255**).
COHEN, L. J.
[1960] A formalization of referentially opaque contexts. *JSL* Vol. 25 (1960) pp. 193-202 (**146**).
CRESSWELL, M. J.
[1960] *Investigations in modal logic.* Thesis submitted in partial requirement for the M.A. degree in the University of New Zealand, Victoria University of Wellington Library (**202**).
[1965] Another basis for S4. *LA* Vol. 8 (No. 31) (1965) pp. 191-195 (**333**).
[1966a] The completeness of S0.5 *LA* Vol. 9 (No. 34) (1966) pp. 263-266 (**314**).
[1966b] Functions of propositions. *JSL* Vol. 31 (1966) pp. 545-560 (**318**).
[1967a] Note on a system of Åqvist. *JSL* Vol. 32 (1967) pp. 58-60 (**312**).
[1967b] The interpretation of some Lewis systems of modal logic. *Australasian Journal of Philosophy* Vol. 45 (1967) pp. 198-206 (**305**).
[1967c] Propositional identity. *LA* Vol. 10 (No. 39-40) (1967) pp. 283-292 (**318**).
CURRY. H. B.
[1950] *A theory of formal deducibility.* Notre Dame, University of Notre Dame Press, 1950 (**414**).
[1952] The elimination theorem when modality is present. *JSL* Vol. 17 (1952) pp. 249-265 (**414**).
DONNELLAN, K. S.
[1966] Reference and definite descriptions. *The Philosophical Review* Vol. 75 (1966) pp. 281-304 (**143**).
DRAKE, F. R.
[1962] On McKinsey's syntactical characterization of systems of modal logic. *JSL* Vol. 27 (1962) pp. 400-406 (**400, 407**).
DUGUNDJI, J.
[1940] Note on a property of matrices for Lewis and Langford's calculi of propositions. *JSL* Vol. 5 (1940) pp. 150-151 (**370, 399**).
DUMMETT, M. A. E. and LEMMON, E. J.
[1959] Modal logics between S4 and S5. *ZML* Vol. 3 (1959) pp. 250-264 (**261, 267, 274, 365, 366**).
DUNCAN-JONES, A. E.
[1935)] Is strict implication the same as entailment? *Analysis* Vol. 2 (1935) pp. 70-78 (**420**).
EMCH, A. F.
[1936] Implication and deducibility. *JSL* Vol. 1 (1936) pp. 26-35 y p. 58 (**417**).
FARIS, J. A.
[1962] *Truth-functional logic*, London, Routledge and Kegan Paul, 1962 (**1**).
FEYS, R.
[1937] Les logiques nouvelles des modalités. *Revue Néoscholastique de Philosophie* Vol. 40 (1937) pp. 517-553 and Vol. 41 (1938) pp. 217-252 (**20**).
[1950] Les systèmes formalisés des modalités Aristotéliciennes. *Revue Philosophique de Louvain* Vol. 48 (1950) pp. 478-509 (**28, 351, 423**).

[1965] *Modal logics.* Louvain, E. Nauwelaerts, 1965 (**187, 233, 257, 274, 276, 277, 284, 335, 351, 414**).

FITCH, F. B.

[1937] Modal functions in two-valued logic. *JSL* Vol. 2 (1937) pp. 125-128 (**318**).

[1939] Note on modal functions. *JSL* Vol. 4 (1939) pp. 115-116 (**318**).

[1948] Corrections to two papers on modal logic. *JSL* Vol. 13 (1948) pp. 38-39 (**318**).

[1952] *Symbolic logic; an introduction*, New York, Ronald Press Co., 1952 (**409, 410, 411, 413**).

[1966] A consistent modal set theory. (Abstract.) *JSL* Vol. 31 (1966) p. 701 (**164**).

[1967] A complete and consistent modal set theory. *JSL* Vol. 32 (1967) pp. 93-103 (**164**).

FRAASSEN, B. C. VAN

[1966] The completeness of free logic. *ZML* Vol. 12 (1966) pp. 219-234 (**126**).

FRAENKEL, A. A. and BAR-HILLEL, Y.

[1958] *Foundations of set theory*, Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1958 (**163**).

FREGE, G.

[1892] Uber Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik* (N.S.) Vol. 100 (1892) pp. 25-50 (English translation: On sense and reference, *translations from the writings of Gottlob Frege*, Peter Geach and Max Black, Oxford, Basil Blackwell, 1952) (**143, 150**).

GEACH, P. T.

[1958] Entailment. *Aristotelian Society Supplementary Volume XXXII* (1958) pp. 157-172 (**420**).

[1963] The problem of identifying objects of reference. *Acta Philosophica Fennica* (1963) *Modal and Many-valued Logics* pp. 41-52 (**143**).

GENTZEN, G.

[1934] Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 39 (1934) pp. 176-210, 405-413. (**409**).

GOBLE, L. F.

[1966] The iteration of deontic modalities, *LA* Vol. 9 (No. 34) (1966) pp. 197-209 (**347**).

GÖDEL, K.

[1933] Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* Vol. 4 (1933) pp. 34-40 (**20, 192, 364**).

GROVER, D. L.

[1966] *Entailment: a critical study of system E and a critical bibliography of the subject in general.* Thesis submitted in partial requirement for the M.A. degree in the Victoria University of Wellington. 1966, Victoria University of Wellington Library (**338, 346**).

HACKING, I.

[1963] What is strict implication? *JSL*, Vol. 28 (1963) pp. 51-71 (**327, 330, 331**).

HALLDÉN, S.

[1948a] A note concerning the paradoxes of strict implication and Lewis's system S1. *JSL* Vol. 13 (1948) pp. 138-139 (**197a**).

[1948b] A question concerning a logical calçulus related to Lewis's system of strict implication which is of special interest for the study of entailment. *Theoria* Vol. 14 (1948) pp. 265-269.

[1949a] Results concerning the decision problem of Lewis's calculi S3 and S6. *JSL* Vol. 14 (1949) pp. 230-236 (**275, 294, 297, 300**).

[1949b] A reduction of the primitive symbols of the Lewis calculi. *Portugaliae Mathematica* Vol. 8 (1949) pp. 85-88 (**320**).

[1951] On the semantic non-completeness of certain Lewis calculi. *JSL* Vol. 16 (1951) pp. 127-129 (**289, 290**).

HAMBLIN, C. L.

[1959] The modal 'probably'. *Mind* Vol. 58 N.S. (1959) pp. 234-240 (**245**).

HANSON, W. H.

[1966] On some alleged decision procedures for S4. *JSL* Vol. 31 (1966) pp. 641-643 (**56**).

HARROP, R.
[1958] On the existence of finite models and decision procedures for propositional calculi. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* Vol. 54 (1958) pp. 1-13 (**400**).

HENKIN, L.
[1949] The completeness of the first-order functional calculus. *JSL* Vol. 14 (1949) pp. 159-166 (**96, 97, 109**).
[1950] Completeness in the theory of types. *JSL* Vol. 15 (1950) pp. 81-91 (**117**).

HEYTING, A.
[1930] Die formalen Regeln der intuitionischen Logik. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* Physikalische-mathematische Klasse 1930. pp. 42-45 (**362**).

HINTIKKA, K. J. J.
[1961] Modality and quantification. *Theoria* Vol. 27 (1961) pp. 110-128 (**42, 92, 121, 143, 146, 430**).
[1963] The modes of modality. *Acta Philosophica Fennica* (1963) *Modal and Many-valued Logics* pp. 65-81 (**126, 143, 146, 430, 431**).
[1967] Individuals, possible worlds, and epistemic logic. *Noûs* Vol. 1 (1967) pp. 33-62 (**122**)

HUGHES, G. E. and LONDEY, D. G.
[1965] *The elements of formal logic.* London, Methuen, 1965 (**1, 5**).

HUNTINGTON, E. V.
[1904] Sets of independent postulates for the algebra of logic. *Transactions of the American Mathematical Society* Vol. 5 (1904) pp. 288-309 (**379**).
[1937] Postulates for assertion, conjunction, negation and equality. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences* Vol. 72 (1937) pp. 1-44 (**332**).

ISHIMOTO, A.
[1954] A set of axioms of the modal propositional calculus equivalent to S3. *The Science of Thought* Vol. 1 pp. 1-11 (**335**).
[1956a] A note on the paper 'A set of axioms of the modal propositional calculus equivalent to S3'. *Ibid.* Vol. 2 (1956) pp. 69-72 (**335**).
[1956b] A formulation of the modal propositional calculus equivalent to S4, *ibid.* Vol. 2 (1956) pp. 73-82 (**335**).

JONSSON, B. and TARSKI, A.
[1951] Boolean algebras with operators. *American Journal of Mathematics* Vol. 73 (1951) pp. 891-939 (**407**).

KALMAR, L.
[1936] Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigenbinaren Funktionsvariablen. *Compositio Mathematics* Vol. 4 (1936) pp. 137-144 (**95**).

KANGER, S.
[1957a] *Provability in logic*, Stockholm, Almqvist & Wiksell, 1957 (**42, 414, 432**).
[1957b] The morning star paradox. *Theoria* Vol. 23 (1957) pp. 1-11 (**143, 146, 147, 148**).
[1957c] A note on quantification and modalities, *ibid.* Vol. 23 (1957) pp. 133-134 (**148**).

KAPLAN, D.
[1966] Review of Kripke [1963a]. *JSL* Vol. 31 pp. 120-122 (**105**).

KENNY, A.
[1963] Oratio obliqua. *Aristotelian Society Supplementary Volume XXXVII* (1963) pp. 127-146 (**143**).

KLEENE, S. C.
[1952] *Introduction to metamathematics* Amsterdam, North Holland Publishing Co., 1952 (**152, 154, 156**).

KNEALE, W. C.
[1956] The province of logic, in *Contemporary British Philosophy* (ed. H. D. Lewis), London, George Allen and Unwin, 1956 pp. 237-261 (**419**).
[1962a] Modality *de dicto* and *de re. Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Stanford 1962, pp. 622-633 (**130**).

KNEALE, W.C. and KNEALE, M.
[1962b] *The development of logic*, Oxford University Press, 1962 (**168, 416**).

KRIPKE, S.A.

[1959] A completeness theorem in modal logic. *JSL* Vol 24 (1959) pp. 1-14 (**117**).

[1962] The undecidability of monadic modal quantification theory. *ZML* Vol. 8 (1962) pp. 113-116 (**94**).

[1963a] Semantical analysis of modal logic I, normal propositional calculi. *ZML* Vol. 9 (1963) pp. 67-96 (**42, 48, 52, 59, 62, 248, 316, 349, 428**).

[1963b] Semantical considerations on modal logics. *Acta Philosophica Fennica* (1963) *Modal and Many-valued Logics* pp. 83-94 (**92, 124, 125, 126, 127, 128**).

[1965a] Semantical analysis of intuitionistic logic I. *Formal Systems and Recursive Functions* (ed. J. N. Crossley, M.A.E. Dummett) Amsterdam, North Holland Publishing Co., 1965, pp. 92-129 (**364**).

[1965b] Semantical analysis of modal logic II, non-normal modal propositional calculi. *The Theory of Models* (ed. J. W. Addison, L. Henkin, A. Tarski) Amsterdam, North Holland Publishing Co., 1965, pp. 206-220 (**232, 305, 308, 309, 310, 311, 357, 376**).

LAMBERT, K.

[1963] Existential import revisited. *NDJ* Vol. 4 (1963) pp. 288-292 (**126**).

LEMMON, E. J.

[1956] Alternative postulate sets for Lewis's S5. *JSL* Vol. 21 (1956) pp. 347-349 (**72**).

[1957] New foundations for Lewis modal systems. *JSL* Vol. 22 (1957) pp. 176-186 (**69, 236, 237, 241, 245, 246, 349, 354**).

[1959] Is there only one correct system of modal logic? *Aristotelian Society Supplementary Volume XXXIII* (1959) pp. 23-40 (**47a, 247**).

[1960a] An extension algebra and the modal system T. *NDJ* Vol. 1 (1960) pp. 2-12 (**392, 395, 400**).

[1960b] Quantified S4 and the Barcan formula. (Abstract). *JSL* Vol. 24 (1960) pp. 391-392 (**85**).

[1963] A theory of attributes based on modal logic. *Acta Philosophica Fennica* (1963) *Modal and Many-valued Logics* pp. 95-122 (**166, 167**).

[1965a] Deontic logic and the logic of imperatives. *LA* No. 29 (1965) pp. 39-70 (**350**).

[1965b] Some results on finite axiomatizability in modal logic. *NDJ* Vol. 6 (1965) pp. 301-307 (**232**).

[1966a] Algebraic semantics for modal logics I. *JSL* Vol. 31 (1966) pp. 46-65 (**377, 394, 398**).

[1966b] Algebraic semantics for modal logics II, *ibid.* pp. 191-218 (**377, 394, 398**).

LEMMON, E. J., MEREDITH, C. A., MEREDITH, D., PRIOR, A. N. and THOMAS, I.

[1957] *Calculi of pure strict implication* (a ciclostil). Christchurch, Canterbury University College, 1957 (**323, 324**).

LEWIS, C. I.

[1912] Implication and the algebra of logic. *Mind* N.S. Vol. 21 (1912) pp. 522-531 (**179, 180, 181, 182, 321, 424**).

[1913] Interesting theorems in symbolic logic. *Journal of Philosophy* Vol. 10 (1913) pp. 239-242 (**179, 181, 183**).

[1914a] A new algebra of strict implication. *Mind* N.S. Vol. 23 (1914) pp. 240-247 (**179, 181, 182, 419**).

[1914b] The matrix algebra for implication. *Journal of Philosophy* Vol. 11 (1914) pp. 589-600 (**179, 181, 184, 427**).

[1918] *A survey of symbolic logic.* Berkeley. University of California, 1918 (**179, 185, 211, 424, 427**). (N.B. El Capítulo sobre implicación estricta no está incluido en la re-edición de Dover de 1961).

[1920] Strict implication. An emendation. *Journal of Philosophy* Vol. 17 (1920) pp. 300-302 (**211**).

LEWIS, C.I. and LANGFORD, C. H.

[1932] *Symbolic logic*, New York, Dover publications, 1932. Second Edition, 1959 (**23, 27, 37, 187, 191, 193, 194, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 211, 215, 219, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 249, 253, 287, 288, 294, 295, 317, 418, 419, 425, 427**).

LEWIS, D. K.

[1968] Counterpart theory and quantified modal logic. *The Journal of Philosophy* Vol. 65 (1968) pp. 113-126 (**318**).

LEWY, C.

[1950] Entailment and necessary propositions, in *Philosophical Analysis* (ed. Max Black) Ithaca, Cornell University Press, 1950, pp. 195-210 (**420**).

[1958] Entailment, *Aristotelian Society Supplementary Volume XXXII* (1958) pp. 123-142 (**420**).

LINSKY, L.
[1966] Substitutivity and descriptions (APA symposium paper) *The Journal of Philosophy* Vol. 63 (1966) pp. 673-683 (**143**).

LÖB, M. H.
[1966] Extensional interpretations of modal logics. *JSL* Vol. 31 (1966) pp. 23-45 (**318**).

ŁUKASIEWICZ, J.
[1951] On variable functors of propositional arguments. *Proceedings of the Royal Irish Academy* Vol. 54 A2 pp. 25-35 (**367, 374**).
[1953] A system of modal logic. *The Journal of Computing Systems* Vol. 1 (1953) pp. 111-149 (**244, 369, 370, 374, 375**).

ŁUKASIEWICZ, J. and TARSKI, A.
[1930] Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Letres de Varsovie* Vol. 23 (1930) (**422**).

MCCALL, S.
[1963] *Aristotle's modal syllogisms*. Amsterdam, North Holland Publishing Co., 1963 (**168**).

MACCOLL, H.
[1880] Symbolical reasoning. *Mind* Vol. 5 (1880) pp. 45-60 (**169, 170, 171, 172**).
[1903] Symbolic reasoning V. *Mind* (N.S.) Vol. 12 (1903) pp. 355-364 (**173, 174, 176**).
[1906a] *Symbolic logic and its applications.* London (1906) (**173, 177**).
[1906b] Symbolic reasoning VIII. *Mind* (N.S.) Vol. 15 (1906) pp. 504-518 (**173, 175, 416**).

MCKINSEY, J. C.C.
[1934a] A note on Bronstein's and Tarter's definition of strict implication. *Philosophical Review* Vol. 43 (1934) pp. 518-520 (**334**).
[1934b] A reduction in the number of postulates for C. I. Lewis' system of strict implication. *Bulletin of the American Mathematical Society* Vol. 40 (1934) pp. 425-427 (**191**).
[1940] Proof that there are infinitely many modalities in Lewis's system S2. *JSL* Vol. 5 (1940) pp. 110-112 (**40**).
[1941] A solution of the decision problem for the Lewis systems S2 and S4 with an application to topology. *JSL* Vol. 6 (1941) pp. 117-134 (**389, 395, 396, 397, 400, 402, 404, 426**).
[1944] On the number of complete extensions of the Lewis systems of sentential calculus. *JSL* Vol. 9 (1944) pp. 41-45.
[1945] On the syntactical construction of systems of modal logic. *JSL* Vol. 10 (1945) pp. 83-96 (**27, 42, 281, 407, 432**).
[1953] Systems of modal logic which are not unreasonable in the sense of Halldén. *JSL* Vol. 18 (1953) pp. 109-113 (**292**).

MCKINSEY, J. C. C and TARSKI, A.
[1944] The algebra of topology. *Annals of Mathematics* Vol. 45 (1944) pp. 141-191 (**393**).
[1948] Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *JSL* Vol. 13 (1948) pp. 1-15 (**216, 364**).

MAKINSON, D. C.
[1966a] There are infinitely many Diodorean modal functions. *JSL* Vol. 31 (1966) pp. 406-408 (**36**).
[1966b] How meaningful are modal operators? *Australasian Journal of Philosophy* Vol. 44 (1966) pp. 331-337 (**407**).
[1966c] On some completeness theorems in modal logic. *ZML* Vol. 12 (1966) pp. 379-384 (**105**).

MARCUS, MRS J. A. *vide* Barcan, R. C.

MASSEY, G. J.
[1966] The theory of truth-tabular connectives both truth-functional and modal. *JSL* Vol. 31 (1966) pp. 593-608 (**320**).
[1967] Binary connectives functionally complete by themselves in S5 modal logic. *JSL* Vol. 32 (1967) pp. 91-92 (**320**).

MATSUMOTO, K.
[1960] Decision procedure for modal sentential calculus S3. *Osaka Mathematical Journal* (1960) pp. 167-175 (**309, 414**).

Vide también Ohnishi and Matsumoto
MENDELSON, E.
[1964] *Introduction to mathematical logic.* Princeton, Van Nostrand, 1964 (**154, 156**).
MEREDITH, C. A.
[1956a] *Contributions to the investigation of pure strict implication.* (a ciclostil) Christchurch, Philosophy Department, Canterbury University College, 1956 (**324, 326**).
[1956b] *Interpretations of different modal logics in the 'Property calculus'.* 1 p. (a ciclostil) Christchurch, Philosophy Department, Canterbury University College, 1956 (registrado y divulgado por A. N. Prior) (**42**).
Vide también Lemmon, Meredith, Prior and Thomas [1957].
MEREDITH, C. A. and PRIOR, A. N.
[1964] Investigations into implicational S5. *ZML* Vol. 10 (1964) pp. 203-220 (**324, 326**).
MOH SHAW-KWEI
[1950] The deduction theorems and two new logical systems. *Methodos* Vol. 2 (1950) pp. 56-75 (**414, 419**).
MONTAGUE, R.
[1963] Syntactical treatments of modality. *Acta Philosophica Fennica* (1963) *Modal and Many-valued Logics* pp. 153-166 (**318**).
MONTGOMERY, H. A. and ROUTLEY, F. R.
[1966] Contingency and non-contingency bases for normal modal logics. *LA* Vol. 9 (No. 35-36) (1966) pp. 318-328 (**335a**).
MOORE, G. E.
[1919] External and internal relations. *Proceedings of the Aristotelian Society* (1919-20). (Reeditado en *Philosophical Studies*, London, Kegan Paul, Trench, Trubner & Co., 1922 (posteriores re-ediciones, Routledge and Kegan Paul) pp. 276-309) (**415**).
MYHILL, J. R.
[1958] Problems arising in the formalization of intensional logic. *LA* Vol. 1 (No. 2) (1958) pp. 74-83 (**121**).
NELSON, E. J.
[1930] Intensional relations. *Mind* Vol. 39 (1930) pp. 440-453 (**420**).
OHNISHI, M.
[1961a] Gentzen decision procedures for Lewis's systems S2 and S3. *Osaka Mathematical Journal* Vol. 13 (1961) pp. 125-137 (**309**).
[1961b] Von Wright-Anderson's decision procedures for Lewis's systems S2-S3. *Ibid.* Vol. 13 (1961) pp. 139-142 (**309**).
OHNISHI, M. and MATSUMOTO, K.
[1957] Gentzen method in modal calculi I. *Ibid.* Vol. 9 (1957) pp. 113-130 (**48, 56, 414**).
[1959] Gentzen method in modal calculi II. *Ibid.* Vol. 11 (1959) pp. 115-120 (**414**).
PARRY, W. T.
[1934] The postulates for 'strict implication'. *Mind, Vol.* 43 (1934) pp. 78-80 (**222**).
[1939] Modalities in the *Survey* system of strict implication. *JSL* Vol. 4 (1939) pp. 131-154 (**29, 69, 176, 197, 211, 212, 213, 252, 262, 273, 276, 282**).
[1953] Review of Becker [1952], *JSL* Vol. 18 (1953) pp. 327-329 (**245**).
PARSONS, T.
[1967] Grades of essentialism in quantified modal logic. *Noûs* Vol. 1 (1967) pp. 181-191 (**166**).
POLLOCK, J. L.
[1966] The paradoxes of strict implication. *LA* No. 34 (Vol. 9) pp. 180-196 (**418, 420**).
[1967a] Logical validity in modal logic. *The Monist* Vol. 51 (1967) pp. 128-135 (**47**).
[1967b] Basic modal logic. *JSL* Vol. 32 (1967) pp. 355-365 (**245**).
POLIFERNO, M.J.
[1961] Decision algorithms for some functional calculi with modality. *LA* Vol. 4 (1961) pp. 138-153 (**94**).
[1964] Correction to a paper on modal logic. *LA* Vol. 7 (1964) pp. 32-33.
PRIOR, A. N.
[1954] The interpretation of two systems of modal logic. *The Journal of Computing Systems,* Vol. 4 (1954) pp. 626-630 (**376**).
[1955] *Formal logic.* Oxford University Press, 1955. Second Edition, 1961 (**1, 71, 130, 135, 137, 141**).

[1955b] Diodoran modalities. *The Philosophical Quarterly* Vol. 5 (1955) pp. 205-213 (**265**).
[1956] Modality and quantification in S5. *JSL* Vol. 21 (1956) pp. 60-62 (**90**).
[1957] *Time and modality*. Oxford University Press, 1957 (**29, 121, 243, 264, 265, 358, 359, 363, 371, 372, 373, 376**).
[1958] Diodorus and modal logic, a correction. *The Philosophical Quarterly* Vol. 8 (1958) pp. 226-230 (una corrección a [1955b]) (**266**).
[1959] Notes on a group of modal systems. *LA* Vol. 2 (1959) pp. 122-127 (**361**).
[1961] Some axiom-pairs for material and strict implication. *ZML* Vol. 7 (1961) pp. 61-65 (**325, 328**).
[1962] Possible worlds. *The Philosophical Quarterly* Vol. 12 (1962) pp. 36-43 (**316**).
[1963a] The theory of implication. *ZML* Vol. 9 (1963) pp. 1-6 (**328, 329**).
[1963b] Is the concept of referential opacity really necessary? *Acta Philosophica Fennica* (1963) *Modal and Many-valued Logics* pp. 189-198 (**143**).
[1963c] Oratio obliqua. *Aristotelian Society Supplementary Volume XXXVII* (1963) pp. 115-126 (**143**).
[1964a] Axiomatizations of the modal calculus Q. *NDJ* Vol. 5 (1964) pp. 215-217 (**361**).
[1964b] K1, K2, and related modal systems. *NDJ* Vol. 5 (1964) pp. 299-304 (**282**).
[1967] *Past, present and future*. Oxford University Press, 1967 (**91, 264, 268, 269**).

Vide también Lemmon, Meredith, Prior and Thomas.
Vide también Meredith and Prior.

PURTILL, R. L.
[1968] About identity through possible worlds. *Noûs* Vol. 2 (1968) pp. 87-89 (**122**).

QUINE, W. V.
[1940] *Mathematical logic*. Harvard University Press, New York, 1940. Second edition, 1957 (**1, 74**).
[1947] The problem of interpreting modal logic. *JSL* Vol. 12 pp. 43-48 (**143**).
[1950] *Methods of logic*. New York, Holt 1950, Revised edition Holt Rinehart and Winston, 1959 (**1, 74**).
[1953] Reference and modality, in *From a logical point of view*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1953, pp. 139-159 (Second edition 1961) (**143, 149**).
[1960] *Word and object*. Cambridge, Mass., MIT Press, 1960 (**143**).
[1963] *Set theory and its logic*. Cambridge, Mass., Belknap Press, Harvard University Press, 1963 (**163**).
[1966] *The ways of paradox and other essays*. New York. Random House, 1966 (**143**).

RASIOWA, H. and SIKORSKI, R.
[1963] *The mathematics of metamathematics*. Warsaw, Pánstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1963 (**385, 394**).

RESCHER, N.
[1959] On the logic of existence and denotation. *The Philosophical Review*. Vol. 58 (1959) pp. 157-180 (**126**).
[1966] On modal renderings of intuitionistic propositional logic. *NDJ* Vol. 7 (1966) pp. 277-280 (**364**).

ROSSER, J. B.
[1953] *Logic for mathematicians*. New York, McGraw-Hill Book Co., 1953 (**154, 155, 195**).

RUNDLE, B. B.
[1965] Modality and quantification, in *Analytical Philosophy*, Second Series (ed. R. J. Butler), Oxford, Basil Blackwell, 1956, pp. 27-39 (**143**).

SCROGGS, S. J.
[1951] Extensions of the Lewis system S5. *JSL* Vol. 16 (1951) pp. 112-120 (**390, 400**).

SEGERBERG, K.
[1967] Some modal logics based on a three-valued logic. *Theoria* Vol. 33 (1965) pp. 53-71 (**363**).

SHEFFER, H. M.
[1913] A set of five independent postulates for Boolean algebras. *Transactions of the American Mathematical Society* Vol. 14 (1913) pp. 481-488 (**319**).

SIMONS, L.
[1953] New axiomatizations of S3 and S4. *JSL* Vol. 18 (1953) pp. 309-316 (**229, 298**).
[1962] A reduction in the number of independent axiom schemata for S4. *NDJ* Vol. 3 (1962) pp. 256-258 (**232**).

SLATER, B. A.
[1963] Talking about something. *Analysis* Vol. 23 (1963-64) pp. 49-53 (**143**).
SMILEY, T. J.
[1959] Entailment and deducibility. *Proceedings of the Aristotelian Society*, Vol. 59 (1958-59) pp. 223-254 (**420**).
[1961] On Lukasiewicz's L-modal systems. *NDJ* Vol. 2 (1961) pp. 149-153 (**370**).
[1963] Relative necessity. *JSL* Vol. 28 (1963) pp. 113-134 (**368**).
SMULLYAN, A. F.
[1948] Modality and description. *JSL* Vol. 13 (1948) pp. 31-37 (**157, 160**).
SOBOCIŃSKI, B.
[1953] Note on a modal system of Feys-Von Wright. *The Journal of Computing Systems* Vol. 1 (1953) pp. 171-178 (**20, 27, 40, 67, 68**).
[1962a] A contribution to the axiomatization of Lewis's system S5. *NDJ* Vol. 3 (1962) pp. 51-60 (**218, 235, 251, 352**).
[1962b] A note on the regular and irregular modal systems of Lewis. *NDJ* Vol. 3 (1962) pp. 109-113 (**287, 352**).
[1962c] On the generalized Brouwerian axioms. *NDJ* Vol. 3 (1962) pp. 123-128 (**255, 352**).
[1963] A note on modal systems. *NDJ* Vol. 4 (1963) pp. 155-157 (**352**).
[1964a] Remarks about the axiomatizations of certain modal systems. *NDJ* Vol. 5 (1964) pp. 71-80 (**274, 280, 282**).
[1964b] Modal system S4.4. *NDJ* Vol. 5 (1964) pp. 305-312 (**262, 270, 272, 283**).
[1964c] Family $\mathscr{K}$ of the non-Lewis modal systems. *NDJ* Vol. 5 (1964) pp. 313-318 (**279, 283**).
STOLL, R. R.
[1961] *Sets, logic and axiomatic theories*. San Francisco and London, Freeman, 1961 (**163, 379, 385, 386, 388**).
STRAWSON, P. F.
[1948] Necessary propositions and entailment-statements. *Mind* Vol. 57, 1948, pp. 184-200 (**420**).
SUGIHARA, T.
[1962] The number of modalities in T supplemented by the axiom CL^2pL^3p. *JSL* Vol. 27 (1962) pp. 407-408 (**258**).
THOMAS, I.
[1962] Solutions of five modal problems of Sobociński. *NDJ* Vol. 3 (1962) pp. 199-200 (**42, 333**).
[1963a] $S1^o$ and Brouwerian axioms. *NDJ* Vol. 4 (1963) pp. 151-152 (**255, 353**).
[1963b] $S1^o$ and generalized S5-axioms. *NDJ* Vol. 4 (1963) pp. 153-154 (**353**).
[1963c] A final note on $S1^o$ and the Brouwerian axioms. *NDJ* Vol. 4 (1963) pp. 231-232 (**255, 353**).
[1964a] Modal systems in the neighbourhood of T. *NDJ* Vol. 5 (1964) pp. 59-61 (**256, 259**).
[1964b] Ten modal models. *JSL* Vol. 29 (1964) pp. 125-128 (**248, 255, 353**).
Vide también Lemmon, Meredith, Prior and Thomas
VREDENDUIN, P. G. J.
[1939] A system of strict implication. *JSL* Vol. 4 (1939) pp. 73-76 (**417**).
WAJSBERG, M.
[1933] Ein erweiteter Klassenkalkül. *Monatshefte für Mathematik und Physik* Vol. 40 (1933) pp. 113-126 (**35, 42, 63, 197**).
WHITEHEAD, A. N. and RUSSELL, B. A. W.
[1910] *Principia mathematica*. Cambridge, Cambridge University Press, 3 Vols., First edition 1910-1913, Second edition 1923-1927 (**6, 152, 154, 160, 162, 178**).
WISDOME, W. A.
[1964] Possibility elimination in natural deduction. *NDJ* Vol. 5 (1964) pp. 295-298 (**412**).
WRIGHT, G. H. VON
[1951] *An essay in modal logic*. Amsterdam, North Holland Publishing Co., 1951 (**20, 27, 48, 56, 68, 70, 73, 130, 133, 134, 135**).
[1957] The concept of entailment, in *Logical Studies*. London, Routledge and Kegan Paul, 1957, pp. 166-191 (**420**).

YONEMITZU, N.
[1955] A note on modal systems, Von Wright's and Lewis's S1. *Memoirs of the Osaka University of the Liberal Arts and Education Bulletin of Natural Science*, No. 4 (1955) p. 45 (199).

INDICE DE AUTORES

Ackermann, W., 244, 245n.
Alban, M. J., 223n, 240n.
Ambrose, A., 17n.
Anderson, A. R., 78n, 96n, 205n, 244-246, 276.
Anderson, J. M., 271n.
Åqvist, L., 191n, 211n, 219, 225, 233.
Aristóteles, 179.

Barcan, R. C., 126, 147n, 161n, 176n, 225, 285.
Bar-Hillel, Y., 175n.
Bayart, A., 71n, 128n, 142n.
Becker, O., 46n, 52n, 60n, 181, 193n, 197n, 198n, 214, 215, 251n, 285.
Belnap, N. D., 244-246, 276.
Bennett, J. F., 277n.
Bergmann, G., 263n.
Beth, E. W., 241n.
Bocheński, I. M., 179n.
Boole, G., 255n.
Bronstein, D. J., 243n.
Brouwer, L. E. J., 60n.
Bull, R. A., 217n, 218n, 237n, 250, 251n.

Canty, J. T., 204n, 273n.
Carnap, R., 57n, 71n, 105n, 167n, 285, 290n.
Cohen, L. J., 165n.
Cresswell, M. J., 191n, 226n, 233n, 235n, 239n, 243n.
Curry, H. B., 273n.

Chisholm, R., 148n.
Church, A., 17n, 27nn, 28n, 119n, 122n, 130n, 131n, 167n, 239n.
Churchman, C. W., 193n, 199n, 215n.

Donnellan, K. S., 162n.
Drake, F. R., 262n, 267n.
Dugundji, J., 252n, 262.
Dummett, M. A. E., 216, 218, 219n, 251n, 285.
Duncan-Jones, A. E., 277n.

Emch, A. F., 274n.

Faris, J. A., 17n.
Feys, R., 37, 51n, 181n, 204n, 216n, 219nn, 221n, 244n, 247n, 273n, 285, 286.
Fitch, F. B., 176n, 239n, 271-273, 285n, 286.
Fraassen, B. C. van, 154n.
Fraenkel, A. A., 175n.
Frege, G., 162n, 167n.

Geach, P. T., 162n, 216, 218, 277n.
Gentzen, G. 271n.
Goble, L. F., 246n.
Gödel, K., 37n, 182n, 251n.
Grover, D. L., 244n, 246n.

Hacking, I., 241 y s., 286.
Halldén, S., 190n, 219n, 222-224, 240 y s.
Hamblin, C. L., 213n.
Hanson, W. H., 96n.
Harrop, R., 262n.
Henkin, L., 131, 138n, 142n.
Heyting, A., 250n.
Hintikka, K. J. J., 71n, 128n, 147n, 148n, 154n, 162n, 165n, 289 y s.
Hughes, G. E., 17n, 26n.
Huntingdon, E. V., 243, 255n.

Ishimoto, A., 244.

Johnsson, B., 267n.
Johnstone, H. W., 271n.

Kalmar, L., 130n.
Kanger, S., 71n, 162n, 165n, 166n, 273n, 290n.
Kaplan, J., 136n.
Kenny, A., 162n.
Kleene, S. C., 171nn.
Kneale, M., 179n, 274n, 276n.
Kneale, W. C., 156n, 179n, 274n, 276n.

Kripke, S. A., 70n, 78n, 89n, 99n, 105n, 128n, 130n, 136n, 142n, 149n, 153-156, 163, 204n, 213n, 218n, 226-231, 237n, 247n, 248n, 251n, 253n, 286, 288 y s., 290n.

Lambert, K., 154n.
Langford, C. H., *vide* Lewis, C. I.
Lazerowitz, M., 17n.
Leibniz, G., 73.
Lemmon, E. J., 75, 112n, 114n, 126n, 128n, 176n, 204n, 205-211, 213n, 214n, 216, 218, 219n, 228, 229, 236, 241n, 246-248, 251n, 252, 255n, 259n, 262n, 286.
Lewis, C. I., 11, 43n, 49n, 60n, 113n, Capítulos 12-13 *passim*, 214, 221-223, 238n, 241n, 275, 281, 285, 286.
Lewis, D. K., 239n.
Lewy, C., 277n.
Linsky, L. 162n.
Löb, M. H., 239n.
Londey, D. G., 17n, 26n.
Łukasiewicz, J., 212n, 251-253, 285n, 286.

McCall, S., 179n.
MacColl, H., 179n, 274n.
McKinsey, J. C. C., 69n, 71n, 182n, 198n, 218n, 220n, 243n, 251, 258-268, 285n, 286, 290n.
Makinson, D. C., 59n, 136n, 267n.
Marcus, Mrs. J. A. (*vide* Barcan, R. C.).
Massey, G. J., 240n.
Matsumoto, K., 78n, 96n, 229n, 273n.
Mendelson, E., 171nn.
Meredith, C. A., 71n, 241.
Meredith, D., 241n.
Moh Shaw-Kwei, 273n, 276n.
Montague, R., 239n.
Montgomery, H. A., 244n.
Moore, G. E., 274n.
Myhill, J. R., 147n.

Nelson, E. J., 277n.
Nieland, J. J. F., 241n.

Ohnishi, M., 78n, 96n, 229n, 273n.

Parry, W. T., 52n, 54n, 112n, 180n, 189n, 195n, 196, 202, 213n, 214n, 216n, 219n, 220n, 286.
Parsons, T., 176n.
Pollock, J. L., 75n, 213n, 275n, 277n.
Poliferno, M. J., 130n.
Price, R., 272n.
Prior, A. N., 17n, 52n, 113n, 127n, 128n, 147n, 156n, 157n, 159n, 161n, 162n, 211n, 217, 218n, 220n, 237, 241nn, 242n, 248-250, 251n, 252-254, 286, 287.
Purtill, R. L., 148n.

Quine, W. V., 17n, 119n, 162n, 166, 175n.

Rasiowa, H., 257n, 259n.
Rescher, N., 154n, 251n.,
Rosser, J. B., 171n, 183n.
Routley, F. R., 244.
Rundle, B. B., 162n.
Russell, B. A. W., 27, 138n, 170n, 171n, 174nn, 180n.

Scroggs, S. J., 258n, 263n, 287.
Segerberg, K., 251n.
Sheffer, H. M., 240.
Sikorski, R., 257n, 259n.
Simons, L., 204-205, 224, 287.
Slater, B. A., 162n.
Smiley, T. J., 251n, 252n, 277n.
Smullyan, A. F., 172n, 174n.
Sobociński, B., 37n, 49n, 69n, 111nn, 199n, 205n, 214n, 215n, 216nn, 218-221, 247, 287.
Stoll, R. R., 175n, 255n, 257nn, 258n.
Strawson, P. F., 277n.
Sugihara, T., 216n.

Tarski, A., 198n, 251, 259n, 267n, 285n.
Tarter, H., 243n.
Thomas, I., 71n, 213n, 215n, 216, 241n, 247.

Vrendenduin, P. G. J., 274n.

Wajsberg, M., 57n, 71n, 105n, 189n.
Wallace, J. R., 245n.
Whitehead, A. N., 27, 138n, 170n, 171n, 174nn, 180n.
Wisdome, W. A., 271n.
Wright, G H. Von, 37n, 49n, 78n, 96n, 111, 113, 115, 156-158, 277n, 287.

Yonemitzu, N., 190n.

INDICE DE MATERIAS

Accesibilidad (de mundos), 73.
Accesibilidad, 138n.
Adhesión a un sistema, 30.
Adición (Booleana), 256.
Adjunción (ley de) (Adj), 28.
  regla de, 182.
Algebra Booleana, Cap. 17 *passim*.
  postulados del, 255 y s.
  teoremas del, 256 y s.
  y CP, 258 y s.
Algebra Booleana finita, 257, 263-264.
  característica, 262.
Algebra de Clausura, 259.
Algebra de Extensión, 259.
Algebra falsificadora, 258.
Algebra T, 259.
  característica, 260.
  finita, 263-265.
Algebras T′, 268.
  y álgebras T, 268-269.
Algebra verificadora, 258, 259.
Alternativos (en diagramas semánticos), 87, 91 y s., 104.
  regla para, 87.
Ambito de un cuantificador, 120.
Antecedente, 21.
Antilogismo, principio de, 276n.
Argumento de un operador, 19.
  de un operador modal, 33, 157n.
  de una variable predicativa, 119.
Asignación de valor (V)
  en CP, 22, 62-63, 135.
  en CEP, 121 y s.
  en sistemas modales, 69-71.
  en CEP modal, 129-130.
  inconsistente, 79.
  verificadora, 22.
  vide también Sistemas particulares en la palabra Modelos, para las condiciones de [V ∼] etc., *vide* Lista de símbolos y reglas importantes.
Asteriscos (en diagramas semánticos), 80 y s.
  regla para colocar, 81.
Atomo (en un Algebra Booleana), 257, 263.
Atributos, 175 y s.
Axioma, 26.
  Brouweriano (B), 59 y s.
  estricto (B′), 214.
  generalizado (B″), 214 y s.
Axiomas CP, 27 (A1–A4, I Parte), 183 (A1–A3, Cap. 12)
  de la necesidad, 35, 37.
  sistemas sin, 246.
  de la posibilidad, 35.
  S4, generalizados, 215 y s.
  vide también Apéndice, 3, esp. 279-281.

B, B′, B″, *vide* Axioma Brouweriano.
Base axiomática, 26.
  (para bases particulares *vide* Apéndice 3, esp. 281-284).
Bases contingentes para Lógica Modal, 244.
Bases equivalentes para sistemas modales, 243 y s.
Base de regla simplificada, 204n.

Cadena de rectángulos, 96.
  repetidora, 100.
Cadenas repetidoras, regla de, 100.
Cálculo de predicados de Primer orden (= Cálculo Elemental de Predicados).
Cálculo de Predicados, 119.
  vide también Cálculo Elemental de Predicados.
Cálculo Elemental de Predicados (CEP), 119 y ss.
  base axiomática, 122.
  completitud, 138-142.
  con identidad, 161.
  modelos y validez, 121-122.
  muestra de sustitución de una fbf CP, 122.
  reglas derivadas, 124.
  reglas de formación, 119 y ss.
  teoremas (CEP1–9), 123-124.
Cálculo Elemental de Predicados Monádico, 130.
Cálculo funcional (= cálculo de predicados), 119.
Cálculos Implicacionales, puros, 241.
  estrictos, 241 y ss.
  estrictos y materiales, 242-243.

Cálculo Proposicional (CP), 17 y ss.
asignación de valor CP, 22 y s.
contenido en S1, 183-187.
degeneración en, 60, 69, 203 y ss., 221, 238.
FNC-CP, 26.
fórmulas válidas, 25 y s. (CP1 – 12), 28, (CP13,32).
juego CP, 62-64.
reglas de formación, 17.
relacionado con el álgebra Booleana, 258 y s.
tautología CP (= fórmula de CP válida), 22.
transform-CP, 45, 60, 221.
de fórmula CEP, 128.
validez CP, 22, 63.
Clausura Universal, 154.
Cobertura (en un álgebra T), 264.
Complemento (en un álgebra), 256.
Completitud (de sistemas axiomáticos), 29.
débil, 29.
fuerte, 29.
vide también Sistemas particulares.
Composición, Ley de (Comp), 28.
en S3, 195-196.
Concebibilidad de mundos, 74-75.
Conjunción, 21.
degenerada, 26.
Conjuntos máximamente consistentes (Γ_1, Γ_2, ...), 131.
Conjunto máximamente subordinado, 137.
Conjunto modelo, 289 y s.
Consequentia mirabilis, 43.
Consistencia de un sistema, 28, 45 y s., 60, 128, 223n, 225.
Cuadro semántico, 78n.
Cuantificador, 120.
Cuantificador Existencial, 120.
Cuantificador Proposicional, 238.
Cuantificador Universal, 120.

D (dominio de individuos), 121.
D (sistema = S4.3.1), 217 y s., 237.
Decidibilidad/no decidibilidad, 25n.
de CEP, 122.
de CEP monádico modal, 130.
Deducción natural, 246, 271-273.
Definiciones, 19-20.
de •, 20, 240.
de ⊃, 20, 183.
de ≡, 20, 183.
de M, 37, 240.
de $\neg\Box$, 37, 182.
de =, 37, 182.
de ∨, 182.
de L, 182.
de ∃, 120.
de ∼, 240.
de L y M en sistemas C, 241.
Definición algebraica de la validez-T, 266-268.
Descripciones concretas (definite), 170-175.
eliminibilidad de, 171n.
en S5 + I, 172 y s.
introduccion mediante definición, 173-175.
teoría de, 174n.
Diagramas, semánticos, 81.
árbol, 99n.
sistema de, 88.
terminantes (finitos), 88, 97-98.
vide también sistemas particulares.
Disyunción, 19.
degenerada, 26.
Dominio de individuos (D), 121, 147, 152 y s.
Doble negación, ley de (DN), 25, 60n.

E, sistema de "vinculación", 244-246.
E, propiedad, 138, 142.
E, fórmula (form), 139.
E′, propiedad, 139, 143, 150 y s.
E_M, fórmula (form), 143 y s.
$E_{M'}$, propiedad, 144.
E, sistemas (Lemmon), 247 y s.
Elemento designado en un álgebra, 261n.
Elemento en un álgebra, 255, 263.
Elemento nulo (en un álgebra), 256n.
Elemento unitario (en un álgebra), 256n.
Eliminación, reglas de, 271.
El más fuerte (de dos sistemas), 36-37.
Equivalencia
material, 21.
estricta, 35.
deductiva, 36.
clase de, 165n.
relación de, 71-72.
Equivalentes, regla de sustitución de (Eq), *vide* Sustitución de equivalentes.
Esquema de Axioma, 27n, 122, 129n.
Esquema de Identidad Contingente (I2′, IC), 165.
Estructura modelo, 288.
normal, 288.
Estudio semántico de la lógica modal, 72.
"Exactamente uno", 171.
Exportación, ley de (Exp.), 28.
Extensión (de un sistema), 30.
Extensión estricta (de S1), 191.

Forma Normal Conjuntiva (FNC), 26, 29.
modal (FNCM), 57-58, 105-106.
ordenada, 105.
Fórmula atómica (de CEP), 119.
Fórmula Barcan (FB), 126.
no validez en CEP + T (S4), 149.
en el CEP de Kripke, 155.

objeciones filosóficas a la, 147.
prueba en CEP +S5, 127.
validez en CEP +S5, 149, 150.
validez en T (S4) +FB, 128 y s.
inversa de, prueba en CEP +T, 126-127.
no validez en el CEP de Kripke, 155.
Fórmula bien formada (fbf), 18.
atómica, 119.
cerrada, 154.
Fórmula completamente modalizada, 113-114.
Fórmulas consistentes, 131.
en relación con la completitud, 131-132.
conjunto de, 131-132.
vide también Conjuntos máximamente consistentes.
Fórmula estricta, 191.
Fórmula inconsistente, conjunto de fórmulas, 131 y s.
Fórmula modalizada, 113-114.
Fórmula no definida (en modelo CEP +T), 148.
Función modal, 53.
de un grado dado, 53 y s.
grado de, 56-57.
en S4, 59.

Generalización (GU), 124.
Grado,
de un predicado, 119.
modal de una fórmula, 54.
de un rectángulo, 88.

Identidad
Ley CP de (Id), 28.
de individuos, 161.
"paradojas" de la, 161 y s.
esquema restringido para (I2′, IC), 165.
esquema no restringido para (I2), 161.
Igualdad (= Identidad).
Implicación,
material, 21.
estricta, 35, 181.
"paradojas" de, 44, 180, 189, 194 y s., 244, 274-277.
Imposibilidad lógica, 31 y s.
Indecidibilidad, 25n.
de CEP, 127.
de CEP monádico modal, 130.
Individuos, 120-121.
Inducción, 28n, 41n.
Inducción matemática, 28 n, 41n.
Intercambio L–M (ILM), 42, 187.
Interpretación, 17.
de CEP, 120.
de sistemas modales, 33 y ss., 212 y s., 217, 246 y s.
de modelos CEP, modales, 152 y s.
de modelos y validez, 120-122.
de CP, 18-20.
"normal" (Halldén), 222.
temporal de la lógica modal, 217 y s., 237, 248 y s.
Intersección (de elementos en un álgebra), 256.
Introducción, reglas de, 271, 272.

Jugada (de un juego), 62, 63.

K (conjunto de elementos de un álgebra), 255.
K(conjunto de elementos de una matriz), 200.
K, sistemas, 220-221.

L (operador de la necesidad), 33.
L, sistemas basados en, 34, 111.
L, distribución, Ley de, 40.
Lewis, sistemas de, Caps. 12-13 *passim*
relación con T, 211.
sistemas "no Lewis", 220n.
$LL\alpha$, tesis de la forma, 190, 197, 211, 214.
LI, 161.
prueba en T + I, 160-161.
LNI, 161.
prueba en S5 + I, 162.
no validez en T (S4) + I, 170.
semántica para sistemas que contengan, 163 y s.
Leyes asociativas (Asoc), 25.
Leyes conmutativas (Conm), 25.
Leyes de Morgan (De M), 25.
Leyes de reducción (R1–R4), 48-49, 53.
Leyes distributivas (Distrib), 25.
distribución L, ley de, 40.
distribución M, ley de, 42.
"Libre para", 123 n.
Lógica Deóntica, 247.
Lógicas intensionales, 239n.
Lógica "libre", 154n.
Logica modal, sistemas de la, 32, 33.
requisitos intuitivos para, 33-36, 212 y ss.
Lógica modal antes de Lewis, 179 y s.

M (operador de la posibilidad), 33, 181.
M, sistemas basados en, 34, 111, 181.
M, ley de distribución de, 42.
M (sistema de Von Wright), 37n, 111.
M′, 27n, 113.
M″, 27n, 115.
Matemática intuicionista, 60n.
Matriz, 200.
hereditaria, 201.
y álgebra, 261n.
Método de la reducción, 24-25, 78.

Método de Lindenbaum, 164n, 261.
Modalidades, 51.
afirmativa, 46, 193n.
de dicto y de re, 156-160, 168n, 169n.
distintas, 51.
equivalentes, 51.
reiteradas, 48, 51.
en T, 52, 68-69.
en S4, 52, 68-69.
en S5, 53, 68-69.
en S3, 196.
en E, 246.
Modelo, 70.
vide también sistemas particulares.
Modelo de un mundo, 238.
Modelo falsificador, 78, 132.
Modus Ponens (MP, RT2), 28, 37, 68, 122-123, 182.
Muestra de sustitución, 25.
de una fbf CP, 122.
para variables individuales, 141.
Multiplicación (Booleana), 256.
MU (conjunto de mundos), 69.
Mundos, 69, 72-75.
Mundo no normal, 226, 234, 235.
Mundos posibles, 72 y ss.

N (= regla de la Necesariedad).
N (conjunto de mundos en un modelo S3.5), 233.
Necesariedad, regla de (N, RT3), 37, 68, 226, 272.
en S1, 189, 190 y ss.
en S2, 192.
en el S4 de Lewis, 198.
restringida (N (S1)), 189 y ss.
Necesidad, axioma de, 35, 37, 246 y s.
Necesidad lógica, 31, 32, 73.
Necesidad, eliminación, introducción, 271 y s.
Necesidad, operador, 33.
Negación, 19.
alternativa, 240, 243-244.
estricta, 243.
doble, ley de la (DN), 25, 60n.
en un álgebra, 256.
Nociones modales, 31-33.
"No completitud semántica" de S1–S3, 222 y s.
Notación, 285-287.
primitiva, 20.
N-múltiples, 43n, 121.
conjunto de, 121.
Nombramiento ganador (en un juego), 63, 64.
No satisfactibilidad, 22.

Objetos intensionales, 167.
Operador
de descripción (ι), 170.
de la necesidad, 33.
de la posibilidad, 33.
diádico, 19.
formador de proposiciones con proposiciones, 19.
modal, 32-33.
monádico, 19.
primitivo, simple, 240.
†-operador, 79-80.

P1, 205.
equivalente a S1, 206 y s.
P2, 207.
equivalente a S2, 207-210.
P3, 210.
P4, 210.
P5, 211.
PM (sistema axiomático)
base, 27 y s.
completitud, 29.
consistencia, 28.
prueba de completitud Henkin, 134 y s.
teoremas, 28.
"Paradojas",
de la vinculación, 244-246, 274-277.
de la identidad, 162 y s.
de la implicación, 44, 180, 189, 194 y ss.
Permutación, ley de (Perm), 28, 196.
Posibilidad, axioma de, 35.
Posibilidad lógica, 32, 73.
Posibilidad, operador, 33.
Postulado de consistencia, 192.
Postulado de existencia, 239.
Precesor (de un rectángulo), 101.
Precesor inmediato (de un rectángulo), 101.
Predicación, principio de, 157 y s.
no validez en CEP + S5, 159.
Predicado de existencia (E), 154n.
Preservación de la validez de las rêglas, 27.
de PM, 28-29.
de T (S4, S5), 67 y s.
de CEP, 124 y s.
de CEP modal, 129 y s.
de S2, 228 y s.
de S3, 229.
Primo (en un álgebra Booleana), 257-258.
Procedimiento de decisión, 25.
Producto (de elementos en un álgebra), 256.
Problema de decisión, 25n.
Propiedad, 121.
formal, material, 157.
de modelo finito, 262n.
Proposición, 18.
contingente, 31.
imposible, 31.
Proposiciones no contingentes, 43-44.
Pruebas, método de establecer, 38-39.
Prueba de completitud algebraica, 268-269.
Prueba Henkin, 131 y ss., 149-152, 160, 164-166.
Prueba subordinada, 271.
estricta, 271.

Q (en un modelo CEP + T), 147.
Q (sistema modal), 248-250, 252.
  axiomatización de, 250.
  matriz para, 249.

R (relación de accesibilidad), 69.
R_*, 138n.
Raya de Sheffer (negación alternativa), 240.
Rectángulo explícitamente inconsistente, 88, 89, 102.
Rectángulo inconsistente, 88, 101.
  en un diagrama S4 y s., 80.
Reducción de modalidades *de re*, 157-159.
  de funciones modales, en S5, 54-57.
  de modalidades en S4, 52.
  en S5, 53.
Re-escritura, 124n.
Regla de Becker (RB), 193 y s., 206-207.
Reglas de formación
  para CP, 17.
  para T, 37.
  para CEP, 119 y s.
Reglas de transformación, 27.
  RT1, 27.
  RT2, 28.
  RT3, 37.
  vide también Apéndice 3, pág. 278 y s.; y Reglas Derivadas.
Reglas Derivadas, 29.
  RD1, 39.
  RD2, 40.
  RD3, 42.
  RD4, 45.
  RD5, 60.
  de CEP, 124.
Reiteración, 271.
  estricta, 272.
Relación, 120-121.
  ancestral, 138n.
  conectada, 237.
  cuasi-reflexiva, 227.
  de visualidad, 63, 69.
  discontinua (discrete), 237.
  simétrica, 71, 149.
  transitiva, 71.
Requisito de inclusión, 148.

S0.5, 213 y s.
  diagramas, 235-237.
  interpretación, 213.
  modelos y validez, 235.
S0.9, 213.
S1
  base, 181 y s.
  contenido de CP en, 183-187.
  equivalencia con P1, 206 y s.
  extensiones equivalentes a T, 190 y s.
  más débil que S2, 200 y s.
  relación con T, 187-191.
  teoremas, 183 y ss.
S2
  base, 192.
  CEP modal basado en, 225 y s.
  diagramas S2, 229 y s.
  equivalencias con P2, 207-210.
  juego S2, 228 y s.
  más débil que S3, 201 y s.
  modelos S2 y validez, 227-229.
  teoremas, 193-194.
    validez de los, 228 y s.
S3
  base, 195, 204.
  equivalencia con P3, 210 y s.
  extensiones de, 219 y s.
  juego S3, 228.
  más débil que S4, 202.
  modalidades en, 195.
  modelos S3 y validez, 226-229.
  relacionado con S4 y S7, 223-225.
  teoremas, 193-195.
    validez de los, 229.
S3.1, 225.
S3.5, 219, 225.
  modelos y validez, 233 y s.
  validez de los teoremas S3.5, 234.
S4, 50, 51, 197 (Lewis).
  álgebra S4, 259.
  bases alternativas para, 112 y s., 204 y s., 211, 224, 242 y s.
  base de deducción natural para, 272-273.
  Completitud, 102-104, 138.
  Consistencia, 60.
  diagramas S4, 96-104.
  funciones modales en, 59.
  juego S4, 65.
  más débil que S5, 68, 202 y s.
  modalidades en, 52 y s., 68.
  modelo S4, 71.
  procedimiento de decisión, 96-102.
  relacionado con CI, 250.
  relacionado con S3 y S7, 223-225.
  validez S4, 66, 71.
  validez de los teoremas S4, 68.
S4, axiomas generalizados, 215 y s.
S4 + I, 161.
  modelos y validez, 169.
S4 + IC, 165.
  validez en, 168 y s.
S4 + FB, 127.
  completitud, 146.
  modelos y validez, 129.
S4 + LNI, 163.
  completitud, 163-165.
  modelos y validez, 163 y s.
$S4_n$, sistemas, 215 y s.
  modalidades en, 216.
S4′ (= S4), 112.
S4.1, 218.
S4.1.1, 218.

S4.2, 216.
S4.3, 217-218.
diagramas, 238.
validez, 237.
S4.3.1 (= D), 217 y s.
validez, 237.
S4.4, 218.
S4.5 (= S5), 219.
S5, 49, 52, 198 (Lewis).
álgebra S5, 259.
bases alternativas para, 113-116.
base de deducción natural para, 272-273.
completitud, 108, 138 y s.
consistencia, 45.
diagramas S5, 104 y s.
extensiones de, 262n, 263n.
funciones modales en, 54-57.
juego S5, 66 y s.
modalidades en, 53, 68.
modelo S5, 72.
no degenera en CP, 69.
procedimiento de decisión, 105-108.
reducción a FNCM en, 57 y s.
teoremas, 52, 54 y s., 59.
validez de los, 68.
validez S5, 67, 72.
S5 + I, 161.
completitud, 164-165.
modelos y validez, 163.
S5 + IC, 165.
modelos y validez, 168 y s.
S5 intuicionista, 250.
S6, 223.
modelos y validez, 231.
procedimiento de decisión, 232 y s.
S7, 223, 225.
modelos y validez, 231.
procedimiento de decisión, 232 y s.
relacionado con S3 y S4, 223-225.
S8, 223.
modelos y validez, 231.
procedimiento de decisión, 232-233.
S9, 225.
modelos y validez, 234.
Satisfactibilidad, 289-290.
Separación, estricta y material, 183.
Se sigue lógicamente de, 32 y s.
"SI", 18.
Silogismo, leyes del (Sil), 28, 183, 195, 205, 208.
disyuntivo, 246, 275 y s.
Símbolos primitivos
de CEP, 119.
de CP, 17.
de T, 36.
Sistema Brouweriano, 59, 213 y s.
consistencia del, 60.
CEP + B, 128, 150.
validez B, 72 y s.
Sistemas C, 241-243.
Sistemas de identidad contingente, 165-169.
Sistemas extensionales, 239n.
Sistema finitamente axiomatizable, 204n.
Sistemas modales "regulares", 221, 238.
Sistema modelo, 289 y s.
Sistema sin interpretar, 17.
Sistema "Survey" (= S3).
Strenge Implikation, 244.
Suma (en un álgebra Booleana), 256.
Sustitución de equivalentes, 25.
regla de (Eq)
en PM, 29.
en T, 41.
en CEP, 124.
en S1, 182.
en S0.5, 236.
Sustitución uniforme, regla de (RT1), 27n., 37, 67, 182 y s.
fallo en las variables predicativas en los sistemas IC. 168n. 169n.

T (sistema de lógica modal), 36 y ss.
bases alternativas para, 110-112.
base de deducción natural para, 271-272.
completitud, 89-93, 136-138, 268-269.
consistencia, 45 y s.
contiene a S2, 211.
diagramas T, 81-88.
juego T, 63-65.
más débil que S4, 68.
modalidades en, 52, 69.
modelo T, 70 y s.
no totalmente completo, 46.
procedimiento de decisión, 88 y s., 266.
teoremas, 39 y ss.
validez de los, 67 y s.
validez T, 64, 70.
y álgebras T', 268 y s.
pruebas para, 78-88.
T, S4, S5, diferenciación entre, 68.
T' (sistema modal) = T), 110-111.
T + I, 161.
modelos y validez, 169.
T + IC, 165.
modelos y validez, 168 y s.
T + FB, 127.
completitud, 142-146.
modelos y validez, 128-130.
T + LNI, 163.
completitud, 163-165.
T, principios (en S1, S2), 191, 193.
Tabla de verdad, 23 y s.
básica, 19-21.
Tautología, 22.
Término, 171 y s.
Teorema, 27, 37-39.
vide también sistemas particulares.
Tesis, 27.
Tiempo continuo, 218 y s.
Tiempo discontinuo (discrete), 218 y s., 237.

Transformación, equivalencia (en CP), 25.
Transposición, ley de (Transp), 25.
Tratamiento extensional, de la modalidad, 239n.

Unión (de elementos de un álgebra), 256.

V (*vide* Asignación de valor).
Validez, 22, 33.
definición algebraica de la, 266-268.
definiciones formales de, 22 y s., 69-72.
definida en términos de juegos, 64, 65 y s.
vide también sistemas particulares.
Valores consiguientes (en un rectángulo), 81.
Valor designado en una matriz, 200.
Variables,
de sustitución, 141.
funcional, 251.
individual, 119.
libre y ligada, 120.
meta-lógicas, 18, 120.
predicativas, 119.
proposicionales, 18.
Variante alfabética, 123.
ligada, 123.
Vinculación (entailment), 32, 34, 35, 274.
"paradojas de", 244-246, 274-277.
transitividad de la, 275.

LISTA DE SIMBOLOS Y REGLAS IMPORTANTES

p, q, r, etc., 18
$\sim$, 18, 19
$\vee$, 18, 19
α, β, etc., 18
1, 19
0, 19
$\cdot$, 20
$\supset$, 20, 21
$\equiv$, 20, 21
$V(p_i)$, 22
$[V\sim]$, 22, 71, 121, 168
$[V\vee]$, 22, 71, 121, 168
$[V\cdot]$, 23
$[V\supset]$, 23
$[V\equiv]$, 23
L, 33, 37
M, 33
$\dashv\exists$, 33
$=$ (equivalencia estricta), 35
N, 37
$\vdash$, 37
$\rightarrow$, 37
RD1, 39
RD2, 40
Éq, 41, 124
ILM, 42
RD3, 42
RD4, 45
RD5, 60
MU, 69
mu_i, 69
R, 70
$V(\alpha, mu_i)$, 70
$\langle MU, R, V\rangle$, 71
$\in$, 71 n
$\{,\}$, 71 n
$\langle,\rangle$, 71 n
$[VL]$, 71, 168
$[VM]$, 71 n
$\langle MU, V\rangle$, 72
$[VL']$, 72
* (en diagramas), 80 y s.
+, 85
$mu_i(i)$, 85
mu_j', 89
$\vdash$ T, 89 n
$mu_i(i)'$, 92
mu_j'', 102
x, y, z, etc., 119
ϕ, ψ, χ, etc., 119
$\forall$, 119
$(\forall \mathbf{a})$, 119
a, **b**, etc., 119 n
(**a**), 119
$\exists$, 120
$(\exists \mathbf{a})$, 120
D, 121
$\langle D, V\rangle$, 121
u_i, 121
$V(x)$, 121
$V(\phi)$, 121
$[V\forall]$, 121
V', 121
$\forall 1$, 122
$\forall 2$, 122
GU, 124
FB, 126
$\langle MU, R, D, V\rangle$, 128
$\dashv$, 131
Λ, 132
Γ, 132
Γ_i, 133
Γj_0, 136
$R*$, 138 n
$\beta[\mathbf{b}/\mathbf{a}]$, 139
$\delta_{1}*$, 145
$\langle MU, R, D, Q, V\rangle$, 147
Q, 147
D, 147
$\mathbf{d_k}$, 150
Λj, 151
$=$ (identidad), 161
I1, 161
I2, 161
LI, 161
LNI, 162
$[V=]$, 163
I2' (IC), 165
$[V=']$, 166
$[V\forall']$, 166
Θ, 168
V_1, 168

$\langle MU, R, D, V_1, \Theta \rangle$, 168
$[V\forall'']$, 168
ι, 170
$(\iota\mathbf{a})$, 170
$(\exists^1\mathbf{a})$, 171
D1, 171
$[V\iota]$, 172
D2, 173
$\hat{x}$, 176
η, 176
$\langle MU, N, V \rangle$, 234
(p), 238
$(\exists p)$, 239
$[V\forall p]$, 239
$[p, q, r]$, 240
δp, 251

Símbolos del Algebra Booleana

a, b, etc., 255
K, 255
$-$, 255
X, 255
$=$, 255
0, 256
1, 256
$+$, 256
$\subset$, 256
$\langle K, -, X \rangle$, 256
$*$, 258
$\langle K, -, X, * \rangle$, 259 y s.

LA lógica modal es la lógica formal de la necesidad lógica y la posibilidad lógica. Este libro explica las ideas fundamentales y las técnicas de la lógica modal y proporciona una imagen clara de toda la materia en su presente estado de desarrollo. Importantes trabajos realizados durante los últimos años han permitido que se presente la materia de un modo más unificado y han proporcionado una nueva dirección a su estudio.

El libro puede ser utilizado como texto en cualquier curso de lógica modal, desde niveles elementales hasta los avanzados. La Parte I es, básicamente, texto explicativo para principiantes en la materia. Trata de los tres sistemas más directos de la lógica proposicional modal, T, S4 y S5; proporciona para éstos desarrollos axiomáticos, definiciones de validez, procedimientos de decisión y pruebas de completitud. El capítulo inicial resume todas las lógicas proposicionales no modales utilizadas en desarrollos subsiguientes. Cuenta también con numerosos ejercicios y esquemas de solución. La Parte II trata del Cálculo Elemental de Predicados (Lower Predicate Calculus) modal. También está basado en los sistemas T, S4 y S5. Utiliza pruebas de completitud del estilo de Henkin y da una introducción general a este tipo de prueba, no limitada a la lógica modal. La Parte III examina los desarrollos modernos de la lógica modal. Esta parte, junto con la bibliografía muy completa, hace de este libro una obra útil de referencia general.

La obra no está destinada únicamente a los estudiantes de Lógica, sino que va también dirigida a matemáticos, filósofos en general, y a cuantos deseen beneficiarse de las conclusiones alcanzadas por esta rama de la Lógica en pujante desarrollo en la actualidad.